

JULIANO BRUN BINDER

**MODELOS COSMOLÓGICOS COM
CAMPO ESCALAR NÃO-MINIMAMEN-
TE ACOPLADO E INTERAÇÕES NO
SETOR ESCURO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer

Curitiba

2006

Resumo

Neste trabalho investigamos a evolução de um Universo no qual um campo escalar, não-minimamente acoplado à curvatura do espaço-tempo, faz o papel da energia escura e é o responsável pela atual expansão acelerada do Universo. Dois acoplamentos diferentes entre a matéria escura não-relativística e a energia escura são considerados, dando origem a dois diferentes modelos. Além disso, consideramos também dois modelos para a pressão da matéria escura: o usual, sem pressão, e outro que é consequência de uma teoria termodinâmica e relaciona a pressão com o acoplamento entre o campo escalar e o escalar de curvatura. Embora o modelo apresente dependência das condições iniciais, mostramos que a mistura constituída pelos componentes do setor escuro juntamente com matéria bariônica e radiação pode reproduzir o comportamento esperado dos parâmetros de densidade, do parâmetro de desaceleração e da distância de luminosidade em função do *redshift*.

Abstract

In this work we investigate the evolution of a Universe where a scalar field, non-minimally coupled to space-time curvature, plays the role of dark energy and drives the Universe to a present accelerated expansion. Two different couplings between non-relativistic dark matter and dark energy are considered, giving rise to different models. Also, two models for dark matter pressure are considered: the usual one, pressureless, and another that comes from a thermodynamic theory and relates the pressure to the coupling between the scalar field and the curvature scalar. Although the model has some dependence on the initial conditions, we show that the mixture consisted of dark components plus baryonic matter and radiation can reproduce the expected redshift behavior of the density parameters, deceleration parameter, and luminosity distance.

Agradecimentos

Aos meus pais, que me educaram não somente com a palavra mas também com o exemplo.

Ao meu orientador, pelo inestimável auxílio.

Aos membros da banca de pré-defesa e defesa, e aos professores e colegas da pós-graduação.

À CAPES e ao contribuinte do Brasil, pelos recursos financeiros.

[...] E também pode observar como alguns deles têm alguma virtude inata que ele não tem, mas que, com empenho, sabe a consciência que pode adquiri-la, e assim deixa de ser indiferente a todas as coisas. Porque tudo, tudo quanto existe deve interessar-lhe, pois desse interesse, precisamente, surge a alegria de viver; o saber viver esse contato permanente da inteligência com tudo quanto existe, não somente com tudo que o rodeia, faz com que a vida se torne mais agradável.

(da Sabedoria Logosófica)

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria da Relatividade	4
2.1	Relatividade Restrita	4
2.1.1	Aspectos básicos da teoria	5
2.1.2	Quadrivetores	6
2.1.3	Mecânica Relativística	7
2.2	Relatividade Geral	8
2.2.1	Tensores	8
2.2.2	Equações do movimento em relatividade geral	10
2.2.3	Derivada covariante	14
2.2.4	Tensor de curvatura	18
2.2.5	Tensor de Ricci e escalar de curvatura	21
2.2.6	Identidades de Bianchi	21
2.2.7	Tensor energia-momento	22
2.2.8	Equações de campo de Einstein	23
2.3	Aplicação	27
2.3.1	Métrica de Robertson-Walker	27
2.3.2	Cálculo do tensor de Ricci e do escalar de curvatura	28
2.3.3	Forma do tensor energia-momento	30
2.3.4	Equações do modelo	30

3	Cosmologia	32
3.1	Fundamentação	32
3.1.1	Lei de Hubble	32
3.1.2	Equações básicas e o modelo padrão	35
3.1.3	Alguns parâmetros observacionais	37
3.1.4	Radiação cósmica de fundo	42
3.2	Densidade do Universo	44
3.2.1	Bárions	44
3.2.2	Radiação	45
3.2.3	Matéria escura	46
3.2.4	Energia escura	47
3.3	Modelos	49
3.3.1	Modelo da constante cosmológica	49
3.3.2	Campo escalar como energia escura	53
3.3.3	Outros modelos	55
4	Modelos com interação	57
4.1	Acoplamento de Anderson e Carroll	58
4.1.1	Equações de campo	58
4.1.2	Matéria escura sem pressão	62
4.1.3	Matéria escura com pressão não-nula	66
4.2	Acoplamento de Wetterich	69
4.2.1	Equações de campo	69
4.2.2	Resultados do modelo	71
4.3	Observações finais	75
5	Conclusões	77
	Bibliografia	80

Capítulo 1

Introdução

As medidas das curvas de rotação de galáxias espirais [1], assim como outros diversos experimentos astronômicos, sugerem que a matéria luminosa que observamos representa apenas uma pequena parcela das partículas massivas do Universo, e que a quantidade mais significativa é relacionada à chamada matéria escura.

Mais recentemente, observações das supernovas do tipo Ia sugeriram que o nosso Universo está atualmente submetido a uma expansão acelerada [2, 3]; a natureza da entidade responsável por isso, chamada de energia escura, ainda permanece desconhecida. A explicação mais simples para a aceleração é dada por uma constante cosmológica [4], que se encaixa muito bem nos dados experimentais atuais, embora esta teoria ainda possua alguns importantes problemas não resolvidos. Outra possibilidade seria introduzir um campo escalar $\phi(t)$ para fazer o papel da energia escura, opção que vem sendo extensivamente estudada pela comunidade científica. Considerando uma equação barotrópica de estado para o campo escalar, $p_\phi = \omega_\phi \rho_\phi$, teríamos um valor constante de $\omega_\phi = -1$ para o modelo da constante cosmológica e um resultado variável $-1 \leq \omega_\phi \leq 1$ para um campo escalar minimamente acoplado. Entretanto, dados medidos pelo *Hubble Space Telescope* [5] impõem a restrição $\omega_\phi = -1.02^{+0.13}_{-0.19}$. Além disso, outras observações recentes [6] chamaram a atenção para a viabilidade de modelos nos quais $\omega_\phi < -1$, que invalidariam tanto a descrição da constante cosmológica como a do campo escalar minimamente acoplado. Alguns modelos de "campo fantasma" foram propostos para contemplar esta hipótese [7], mas eles também enfrentam sérios problemas [8].

Neste trabalho, consideramos um campo escalar não-minimamente acoplado à curvatura do espaço-tempo, que foi investigado em [9] e amplamente estudado

recentemente, por exemplo, nos trabalhos [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Em um artigo mais recente [16] foi estudada a validade de tais modelos e demonstrou-se que as equações de campo de Einstein são estáveis sob algumas condições impostas à constante que acopla o campo escalar à curvatura escalar.

Dentre os diversos modelos existentes para a interação no setor escuro [17, 18] – que poderiam substituir aqueles já mencionados caso falhem em testes experimentais futuros – investigamos aqui duas escolhas específicas. Primeiramente seguimos o modelo estudado em [19] e mais recentemente em [20], no qual a massa da partícula de matéria escura é proporcional ao valor do campo escalar que representa a energia escura. Notamos que neste caso é necessário que se tome algumas precauções, uma vez que se assumirmos que a massa da partícula de matéria escura pode variar com o tempo, poderíamos tornar a densidade de energia da matéria escura fisicamente inconsistente em estágios iniciais da evolução do Universo. Chamaremos este modelo daqui em diante de "acoplamento de Anderson e Carroll". Em segundo lugar, consideramos outro tipo de acoplamento direto entre a matéria escura e a energia escura, seguindo o modelo proposto em [21] e estudado mais recentemente em [22] e [23]. Este caso será chamado neste trabalho de "acoplamento de Wetterich".

A matéria bariônica e a radiação são descritas aqui como constituintes usuais não-interagentes, sendo a primeira não-relativística e sem pressão. Já para a matéria escura, dois modelos são considerados: o primeiro, assumindo que ela possui pressão nula (como é feito usualmente), e o segundo, advindo de uma teoria termodinâmica [24] relacionando os efeitos do acoplamento não-mínimo com a pressão da matéria escura [15].

Resolvemos o conjunto completo de equações diferenciais deduzidas para os modelos, a partir de condições iniciais encontradas na literatura para os parâmetros do Universo dos dias de hoje. Os observáveis resultantes – os parâmetros de densidade dos constituintes, o parâmetro de desaceleração e a distância de luminosidade – que são obtidos como soluções das equações de campo serão comparados com o conjunto de dados disponível para que tiremos conclusões acerca da viabilidade dos modelos. Nós mostramos que soluções fisicamente aceitáveis são obtidas, se escolhermos condições iniciais restringindo a natureza variável do campo escalar em estágios iniciais. Além disso, existem alguns parâmetros arbitrários que serão importantes para possibilitar o ajuste dos modelos a dados de experimentos vindouros.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos

a base da Cosmologia moderna – a teoria da relatividade geral. Procuramos introduzir a noção de tensores e de derivada covariante, para então deduzir as equações de campo e aplicá-las para encontrar as equações que regem a evolução do Universo. No capítulo 3 apresentamos o quadro atual da Cosmologia. Primeiramente mostramos quais são os principais observáveis do Universo e seus respectivos valores medidos atualmente. Em seguida exibimos o processo atual da contagem da massa total do Universo, que dá evidências para a existência de matéria e energia escuras. Finalmente apontamos as origens e previsões dos dois modelos mais aceitos para explicar a evolução do Universo: o da constante cosmológica e o do campo escalar minimamente acoplado. O capítulo 4 contém nossas contribuições originais, e nele propomos os modelos que incluem a presença de um campo escalar não-minimamente acoplado, de dois tipos diferentes de interação entre o setor escuro e de duas possibilidades para explicar a pressão de matéria escura. Neste capítulo deduzimos as equações dos modelos e as resolvemos, comparando os resultados com os dados experimentais mostrados no capítulo 3.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade

Neste capítulo procuramos apresentar a teoria da relatividade de maneira didática e auto-suficiente, de tal forma que o leitor leigo, não familiar com o formalismo, consiga aproveitar as definições e desenvolvimentos; não há a pretensão de expor o assunto de maneira completa ou profunda.

2.1 Relatividade Restrita

A teoria da relatividade restrita, ou teoria especial da relatividade, foi proposta em 1905 por Albert Einstein para contornar o fato, percebido alguns anos antes por Lorentz, de que as equações de Maxwell não se comportam de acordo com as transformações de Galileu quando o sistema de referência muda (por exemplo, quando se considera um mesmo problema físico a partir do ponto de vista de dois observadores com retilíneo movimento uniforme um em relação ao outro). Era necessário adequar as transformações de Lorentz ao restante das teorias físicas existentes e, para tanto, Einstein concluiu que as leis da natureza devem permanecer invariantes sob uma transformação de Lorentz, e não sob uma transformação de Galileu como antigamente se acreditava. A teoria da relatividade restrita supõe que os referenciais inerciais (laboratórios em repouso ou movimento retilíneo uniforme) são indistinguíveis uns dos outros, e é apenas neles que a teoria tem validade. Dessa forma, com leis que se reduzem às de Newton no regime de baixas velocidades, foi possível aperfeiçoar a teoria clássica, generalizando-a para englobar também as altas velocidades. As consequências desse fato foram de enormes proporções, sendo possível, por exemplo, explicar as consequências do experimento de Michelson e Morley,

que demonstraram o fato da velocidade da luz não mudar quando medida em diversas direções a partir da Terra (embora a própria Terra esteja em movimento numa direção bem conhecida). Atualmente uma das aplicações práticas das correções da relatividade restrita é no sincronismo dos relógios que integram os satélites de GPS (*Global Positioning System*).

2.1.1 Aspectos básicos da teoria

O espaço de Minkowski, palco da teoria da relatividade restrita, unifica o espaço tridimensional euclidiano com o tempo [25]. Dessa maneira, substituímos a notação (t, x, y, z) por $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, onde $x^0 = ct$ para manter coerência dimensional. Nessa notação, os índices gregos (como α em x^α) variam de 0 a 3.

Uma transformação de Lorentz homogênea é uma transformação de um sistema de coordenadas x^α no espaço-tempo para outro sistema x'^α , de tal forma que se verifique a relação

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta, \quad (2.1)$$

na qual x'^α e x^α são quadri-vetores (definidos a seguir) e Λ^α_β é uma matriz constante.

Se por exemplo tivermos um observador O' movendo-se em relação a outro observador O com velocidade v^1 (ou seja, na direção x^1), então os eventos em O' relacionam-se às coordenadas de O por

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

com

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.3)$$

Se tivéssemos uma velocidade vetorial arbitrária v^i (na notação de quadri-vetores os índices latinos representam o espaço tridimensional e variam de 1 a 3; v^i tem um papel análogo ao do vetor \vec{v}), bastaria incorporar uma rotação na transformação de Lorentz e as expressões apresentadas manter-se-iam inalteradas.

2.1.2 Quadrivetores

Denomina-se quadrivetor a todo vetor com quatro elementos num espaço de Minkowski que se transforma, sob uma transformação de Lorentz, exatamente da mesma maneira como se transforma o sistema de coordenadas.

Vamos supor uma transformação de Lorentz homogênea agindo sobre o sistema de coordenadas x^α :

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta. \quad (2.4)$$

É importante ressaltar que estamos utilizando a convenção da soma de Einstein, que faz com que os índices repetidos num mesmo termo sejam somados. Por exemplo, a equação (2.4) é uma abreviação para (lembrando que os índices gregos variam de 0 a 3)

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_0 x^0 + \Lambda^\alpha_1 x^1 + \Lambda^\alpha_2 x^2 + \Lambda^\alpha_3 x^3. \quad (2.5)$$

Chamamos de quadrivetor contravariante (índice em cima) àquele que se transforma de acordo com

$$V^\alpha \rightarrow V'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta, \quad (2.6)$$

e de quadrivetor covariante (índice embaixo) aquele que obedece à regra de transformação

$$U_\alpha \rightarrow U'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta U_\beta, \quad (2.7)$$

onde Λ_α^β é a matriz transposta da inversa de Λ^α_β . Para transformar um quadrivetor covariante em contravariante ou vice-versa, basta utilizar a relação

$$V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta \quad \text{ou} \quad U^\alpha = \eta^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (2.8)$$

Podemos definir agora o tensor métrico de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, que é utilizado no contexto da relatividade restrita (na qual o espaço-tempo é plano) e tem por função definir como se calcula a distância entre dois pontos:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

2.1.3 Mecânica Relativística

Uma propriedade fundamental da teoria da relatividade restrita é deixar invariante o chamado tempo próprio $d\tau$ (aquele que uma partícula mede no seu próprio referencial), assim como o intervalo diferencial ds entre dois eventos, sob qualquer transformação de Lorentz [25]:

$$d\tau'^2 = d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \frac{ds'^2}{c^2} = dt^2 - \frac{1}{c^2} d\vec{x}^2 = \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.10)$$

Podemos definir a força relativística:

$$f^\alpha = m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{dp^\alpha}{d\tau}, \quad (2.11)$$

onde temos o quadrivetor energia-momento p^α , que em sua componente temporal guarda a informação da energia da partícula e nas componentes espaciais o vetor momento linear:

$$p^\alpha \equiv m \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{E}{c}, p^i \right). \quad (2.12)$$

É possível manipular (2.10) para se obter o efeito da contração temporal de um referencial em movimento:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 dt^2 = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) dt^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2}. \quad (2.13)$$

Tomando a componente temporal de (2.12), utilizando o fato de que $x^0 = ct$ e lançando mão de (2.13) para calcular $dt/d\tau$, temos que

$$E = \gamma mc^2, \quad (2.14)$$

e das componentes espaciais de (2.12) juntamente com (2.13) vem imediatamente que

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}. \quad (2.15)$$

Elevando (2.14) ao quadrado e fazendo uso de (2.3) e (2.15), chegamos à expressão que relaciona a energia à massa e ao momento linear:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.16)$$

2.2 Relatividade Geral

Em 1915 Einstein propôs a teoria da relatividade geral, que tem como postulado o fato de que sistemas acelerados são fisicamente equivalentes àqueles submetidos a campos gravitacionais, tornando equivalentes a massa inercial e a massa gravitacional de um corpo [26]. Com essa base, demonstrou que toda porção de matéria curva o espaço-tempo à sua volta, e é essa curvatura que observamos como sendo o campo gravitacional. Com isso, surgiu uma teoria que generaliza a relatividade restrita para o caso de referenciais não-inerciais e reduz-se à teoria da gravitação de Newton no regime clássico, e ainda complementa esta última para incluir também o caso de grandes densidades de massa.

A teoria da relatividade geral baseia-se no chamado princípio da equivalência [27, 28, 29, 30], que enuncia que "em cada ponto de um espaço-tempo imerso em um campo gravitacional arbitrário é possível escolhermos um sistema de coordenadas localmente inercial de forma que, em uma região suficientemente pequena do ponto em questão, as leis da natureza tenham a mesma forma que num sistema de coordenadas cartesiano na ausência de aceleração".

Uma forma mais elegante de expressar o princípio da equivalência é por meio do princípio da covariância geral [27], que postula que "uma equação é válida em um campo gravitacional arbitrário se ela vale na ausência de gravidade – ou seja, se concorda com a relatividade restrita – e se ela preserva a sua forma sob uma transformação geral de coordenadas – ou, em outras palavras, pode ser escrita de forma covariante".

2.2.1 Tensores

Tensores são entidades geométricas que generalizam escalares (sem índice), vetores (que possuem um índice) e matrizes (com dois índices) para um número arbitrário n de índices, por isso chamados de tensor de ordem n . Embora definidos em termos de um sistema de coordenadas, os tensores são independentes de referencial. Da mesma forma que no caso dos quadri-vetores apresentados anteriormente, os tensores também obedecem obrigatoriamente a regras de transformação.

A generalização de quadri-vetores para tensores é feita da seguinte forma: um tensor com índices μ, ν, \dots superiores e κ, λ, \dots inferiores se transforma como o produto de vetores contravariantes $U^\mu W^\nu \dots$ e vetores covariantes $V_\kappa Y_\lambda \dots$, e terá

sua ordem dada pela soma do número de índices covariantes e contravariantes. Se todos os índices forem superiores, o tensor é contravariante; se todos forem inferiores, o tensor é covariante; caso contrário o tensor é misto.

Por exemplo, sob uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x'$, um tensor $T^\mu{}_\nu{}^\lambda$ (que é de terceira ordem) transforma-se da seguinte maneira:

$$T'^\mu{}_\nu{}^\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T^\kappa{}_\rho{}^\sigma, \quad (2.17)$$

onde a convenção da soma de Einstein, mostrada em (2.5), continua a ser usada.

O tensor de Kronecker (ou também delta de Kronecker) é de grande importância no contexto da teoria que está sendo apresentada. Trata-se de um tensor misto de segunda ordem, representado por $\delta^\mu{}_\nu$, e que tem valor 0 se $\mu \neq \nu$ e 1 se $\mu = \nu$ (ou seja, sua representação é análoga à de uma matriz identidade).

É importante ressaltar que o número zero, os escalares e o tensor de Kronecker (juntamente com seus produtos diretos) são os únicos tensores cujas componentes são as mesmas em todos os sistemas de coordenadas. Além disso, se por exemplo algum tensor se anula em um sistema de coordenadas particular, ele será nulo também em todos os outros referenciais; fato que está relacionado ao princípio da covariância geral.

A álgebra tensorial, que permite formar novos tensores a partir de tensores conhecidos, possui três operações básicas:

(i) combinação linear de tensores com os índices superiores e inferiores idênticos:

$$T^\mu{}_\nu = \alpha A^\mu{}_\nu + \beta B^\mu{}_\nu, \quad (2.18)$$

(ii) produto direto, que forma um novo tensor com todos os índices dos tensores originais:

$$T^\mu{}_\nu{}^\rho = A^\mu{}_\nu B^\rho, \quad (2.19)$$

(iii) contração, que ocorre ao igualarmos um índice covariante com um índice contravariante de um tensor. Usamos então a convenção da soma (2.5) para gerar um novo tensor no qual os dois índices contraídos ficam ausentes:

$$T^{\mu\rho} = T^\mu{}_\nu{}^{\rho\nu}. \quad (2.20)$$

Para efetuar o chamado levantamento e abaixamento de índices, operação análoga à efetuada em (2.8) no contexto de quadrivetores, utilizamos um tensor

conhecido como tensor métrico e representado por $g^{\mu\nu}$ ou $g_{\mu\nu}$ (que será definido na seção seguinte):

$$T^{\nu\rho}_{\sigma} = g^{\mu\nu} T_{\mu}^{\rho}_{\sigma} \quad \text{e} \quad T_{\nu}^{\rho}_{\sigma} = g_{\mu\nu} T^{\mu\rho}_{\sigma}. \quad (2.21)$$

Um tensor é dito simétrico se permanece inalterado sob uma troca de índices:

$$V_{\mu\nu} = V_{\nu\mu}. \quad (2.22)$$

Podemos também simetrizar um tensor utilizando a relação (parênteses são um símbolo para simetria)

$$V_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (V_{\mu\nu} + V_{\nu\mu}). \quad (2.23)$$

Um tensor também pode ser anti-simétrico se obedecer à igualdade

$$V_{\mu\nu} = -V_{\nu\mu}, \quad (2.24)$$

e finalmente podemos anti-simetrizar um tensor utilizando a relação (colchetes representam anti-simetria)

$$V_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (V_{\mu\nu} - V_{\nu\mu}). \quad (2.25)$$

2.2.2 Equações do movimento em relatividade geral

Consideremos uma partícula em queda livre sob a ação de um campo gravitacional, em um sistema de coordenadas ξ^α também em queda livre – ou seja, estacionário em relação à partícula – de tal forma que nele não se observa aceleração alguma [27]:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.26)$$

onde $d\tau^2$ é o tempo próprio observado pela partícula que cai livremente, dado por

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (2.27)$$

Podemos escrever (2.26) de uma maneira diferente:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = 0, \quad (2.28)$$

e utilizamos a regra da cadeia para fazer uma relação com um sistema de coordenadas cartesiano x^μ que está em repouso em relação ao laboratório (para o qual a partícula cai em queda livre):

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0. \quad (2.29)$$

Calculando a derivada dos termos entre parênteses:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = 0, \quad (2.30)$$

utilizando novamente a regra da cadeia,

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.31)$$

multiplicando ambos os lados por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$ e utilizando a relação matemática

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta^\lambda_\mu, \quad (2.32)$$

onde δ^λ_μ é o já mencionado tensor de Kronecker, chegamos a:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.33)$$

Desta equação podemos definir a conexão afim $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.34)$$

A partir da conexão afim é possível definir geodésicas, que representam o caminho mais curto entre dois pontos num dado espaço-tempo. Veremos em (2.55) que a conexão afim, embora aparente, **não** é um tensor, pois não obedece a regra de transformação de tensores.

Como sabemos que as derivadas de primeira ordem comutam, podemos observar diretamente de (2.34) que a conexão afim é simétrica sob uma troca dos índices inferiores:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \quad (2.35)$$

A partir da equação (2.27), podemos escrever o tempo próprio de uma outra forma por meio da regra da cadeia:

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.36)$$

e com isso definimos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.37)$$

Esse tensor é de capital importância em relatividade geral. Na prática, é a partir dele que todas as outras quantidades geométricas são encontradas. Sua função é medir distância entre dois pontos e ângulos entre vetores num espaço-tempo curvo. Para ilustração, o comprimento da curva entre os pontos a e b , parametrizados por λ , é dado por:

$$L = \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (2.38)$$

A partir de (2.37) nota-se que o tensor métrico é simétrico, pois podemos livremente realizar nessa equação a troca de índices ($\alpha \leftrightarrow \beta$) sem prejuízo nenhum, visto que ambos estão contraídos. E uma vez que supomos que as derivadas de primeira ordem comutam, temos que

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (2.39)$$

A equação (2.37) define um tensor métrico covariante. Mas esta mesma definição garante que ele precisa ter um inverso, o tensor métrico contravariante:

$$g^{\nu\sigma} = g^{\sigma\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta}. \quad (2.40)$$

Calculando o produto entre (2.40) e (2.37):

$$g^{\nu\sigma} g_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\alpha} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\mu} = \delta^\sigma_\mu, \quad (2.41)$$

onde, a cada passo, utilizamos a relação (2.32) ou o fato de que $\eta^{\alpha\beta} \eta_{\gamma\alpha} = \delta^\beta_\gamma$, que vem diretamente da definição de $\eta^{\alpha\beta}$ (2.9). Podemos definir a quantidade g ($g < 0$ para a convenção (2.9) utilizada aqui) como o determinante do tensor métrico:

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (2.42)$$

Outra propriedade interessante do tensor métrico é obtida se derivarmos (2.41) em relação a x^κ :

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa} (g^{\nu\sigma} g_{\mu\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \delta^\sigma_\mu = 0 \quad \therefore \quad g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^\kappa}. \quad (2.43)$$

Voltamos agora ao contexto das conexões afins. Multiplicando a definição da conexão afim (2.34) por $\partial \xi^\beta / \partial x^\lambda$ e utilizando novamente a relação (2.32), chegamos em

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.44)$$

Calculando explicitamente a derivada de $g_{\mu\nu}$ (representado por (2.37)), em relação a x^λ , vem:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.45)$$

Mas sabemos, a partir de (2.44), que valem as relações

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho}. \quad (2.46)$$

Além disso, é possível reescrever (2.37) mediante troca de índices:

$$g_{\rho\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad \text{ou} \quad g_{\rho\mu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.47)$$

pois sabemos de (2.39) que o tensor métrico é simétrico. Com isso, (2.45) simplifica-se para

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \quad (2.48)$$

Fazendo uma soma de três termos com índices permutados a partir de (2.48) e cancelando os iguais devido ao fato da conexão afim ser um pseudo-tensor simétrico em seus índices inferiores, é possível chegar a uma expressão na qual a conexão afim aparece em um único termo:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu}. \quad (2.49)$$

Objetivando isolar $\Gamma^\rho_{\mu\lambda}$, podemos multiplicar ambos os lados da última equação por $g^{\nu\sigma}$:

$$\Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} g^{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right), \quad (2.50)$$

e utilizamos a propriedade (2.41) do tensor métrico, que aqui pode ser escrita como $g_{\rho\nu} g^{\nu\sigma} = \delta^\sigma_\rho$, para obter uma expressão final para a conexão afim:

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}, \quad (2.51)$$

na qual a notação entre chaves é uma representação equivalente e é chamada de *símbolo de Christoffel*. Dissemos anteriormente que a conexão afim não é um tensor. De fato; vamos mudar as coordenadas de (2.34) para demonstrar:

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}, \quad (2.52)$$

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right), \quad (2.53)$$

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right). \quad (2.54)$$

Comparando com (2.34), vemos que:

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}. \quad (2.55)$$

O primeiro termo do lado direito é o que esperaríamos se $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ fosse um tensor; o segundo termo é não-homogêneo e torna-o um não-tensor.

2.2.3 Derivada covariante

Já mostramos que a derivada de um tensor não produz sempre outro tensor. Consideremos um vetor contravariante V^{μ} cuja lei de transformação é

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}. \quad (2.56)$$

Derivando em relação a x'^{λ} , vem

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}. \quad (2.57)$$

O primeiro termo do lado direito é o que esperaríamos se $\partial V^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ fosse um tensor; o segundo termo impossibilita o caráter tensorial. Mas embora $\partial V^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ não seja um tensor, podemos construir um a partir de uma forma diferente de (2.55). Para tanto, usemos mais uma vez a identidade apresentada em (2.32), que podemos escrever aqui como

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\lambda}_{\nu}. \quad (2.58)$$

Derivando a identidade em relação a x'^{ν} , encontramos imediatamente que

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}. \quad (2.59)$$

Podemos finalmente escrever (2.55) com o segundo termo do lado direito de uma maneira diferente e iniciar a construção de uma derivada que obedeça à regra de transformação de tensores:

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}. \quad (2.60)$$

Pretendemos agora multiplicar (2.60) com (2.56). Mas antes faremos, por conveniência, a troca de índices ($\lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \lambda, \nu \rightarrow \kappa, \tau \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \nu$) em (2.60) e ($\mu \rightarrow \kappa, \nu \rightarrow \eta$) em (2.56), fato que não altera em nada a validade das equações, pois índices repetidos podem ser trocados livremente pelo fato de representarem uma soma implícita. O resultado da multiplicação é

$$\Gamma'^{\mu}_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \right) \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\eta}} V^{\eta}. \quad (2.61)$$

Fazendo agora no segundo termo dentro do parênteses a troca ($\nu \rightarrow \rho$), possível uma vez que o índice ν está contraído, e também neste termo trocando a ordem dos denominadores $\partial x'^{\kappa}$ e $\partial x'^{\lambda}$ e usando o fato de que

$$\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\eta}} = \delta^{\sigma}_{\eta}, \quad (2.62)$$

chegamos a uma relação bastante semelhante a (2.57):

$$\Gamma'^{\mu}_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\sigma}. \quad (2.63)$$

Agora podemos finalmente somar (2.57) com (2.63) – (efetuando no último termo desta última a troca do índice contraído ($\sigma \rightarrow \nu$)), e eliminar o termo não-homogêneo:

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'^{\mu}_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} V^{\sigma} \right). \quad (2.64)$$

A quantidade entre parênteses claramente se transforma como um tensor, e por isso podemos definir a derivada covariante de um tensor contravariante:

$$\nabla_{\lambda} V^{\mu} = V^{\mu}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} V^{\kappa}, \quad (2.65)$$

onde $\nabla_{\lambda} V^{\mu}$ e $V^{\mu}_{;\lambda}$ são duas notações equivalentes utilizadas para a derivada covariante; neste trabalho adotaremos a primeira. Por métodos análogos aos apresentados acima, é possível também definir a derivada covariante de um tensor covariante:

$$\nabla_{\nu} V_{\mu} = V_{\mu;\nu} \equiv \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda}. \quad (2.66)$$

Pode-se também estender a idéia de derivada covariante para tensores de ordens arbitrárias, e é possível demonstrar que o resultado continua sendo um tensor:

$$\nabla_{\kappa} V^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} = \frac{\partial V^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\rho} V^{\rho\cdots}_{\nu\cdots} + \cdots - \Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa} V^{\mu\cdots}_{\sigma\cdots} + \cdots. \quad (2.67)$$

Desta forma passamos a entender melhor a função da conexão afim: descrever derivadas covariantes em diferentes sistemas de coordenadas.

Da mesma maneira que a derivada ordinária, a derivada covariante obedece a algumas propriedades básicas, como linearidade (i), regra de Leibniz (ii) e comutação entre contração e derivada covariante (iii):

$$(i) \quad \nabla_\lambda (\alpha A^\mu_\nu + \beta B^\mu_\nu) = \nabla_\lambda \alpha A^\mu_\nu + \nabla_\lambda \beta B^\mu_\nu, \quad (2.68)$$

$$(ii) \quad \nabla_\rho (A^\mu_\nu B^\lambda) = \nabla_\rho A^\mu_\nu B^\lambda + A^\mu_\nu \nabla_\rho B^\lambda, \quad (2.69)$$

$$(iii) \quad \nabla_\rho T^{\mu\lambda}_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\lambda}_\lambda + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\nu\lambda}_\lambda. \quad (2.70)$$

Um resultado extremamente importante é a nulidade da derivada covariante do tensor métrico, deduzida a seguir. De (2.67) temos que

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} g^{\nu\kappa} + \Gamma^\nu_{\kappa\lambda} g^{\mu\kappa}. \quad (2.71)$$

Fazendo então uso de (2.51), que define a conexão afim a partir do tensor métrico, vem:

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g^{\nu\kappa} g^{\rho\mu} \left(\frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\rho} \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} g^{\rho\nu} \left(\frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\rho} \right). \quad (2.72)$$

Para simplificar a expressão acima necessitamos da propriedade apresentada em (2.43), e devido a ela podemos observar que o primeiro termo do lado direito de (2.72) se cancela com a soma do primeiro termo de cada um dos parênteses. Os outros termos podem ser cancelados se, por exemplo, fizermos a troca dos índices repetidos ($\rho \leftrightarrow \kappa$) dentro do primeiro parênteses. Dessa maneira concluimos que

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.73)$$

A derivada covariante do tensor métrico covariante também se anula. Para tanto, basta utilizar novamente a definição da derivada covariante (2.67) juntamente com (2.51) e (2.48):

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} = 0. \quad (2.74)$$

O fato de que $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ pode ser explicado da seguinte maneira: se a derivada covariante do tensor métrico – que é também um tensor – se anula em um

sistema de coordenadas localmente inercial, porque $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$ e $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ se anulam, então esse tensor deve se anular também para todos os outros sistemas de coordenadas, obedecendo ao princípio da covariância geral.

Das propriedades (2.73) e (2.74) notamos que a derivada covariante comuta com as operações de levantamento e abaixamento de índices. Por exemplo,

$$\nabla_\lambda V^\mu = \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} V_\nu) = g^{\mu\nu} \nabla_\lambda V_\nu. \quad (2.75)$$

Agora também já é possível definir diversas operações conhecidas do cálculo vetorial de forma covariante:

Gradiente:

$$\nabla_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \quad (2.76)$$

Divergente:

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} V^\sigma, \quad (2.77)$$

que também pode ser escrito como

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} V^\mu)}{\partial x^\mu}, \quad (2.78)$$

cujas demonstrações são feitas a seguir e o termo g já foi definido em (2.42). Observamos a seguinte relação para a contração da conexão afim, a partir de sua definição apresentada em (2.51):

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\nu\mu} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}, \quad (2.79)$$

onde usamos o fato de que $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ e que o primeiro termo dentro do parênteses cancela-se com o terceiro, visto que é possível efetuar a troca de índices contraídos ($\mu \leftrightarrow \nu$) em qualquer um deles. Como o resultado final da igualdade acima apresenta dois índices contraídos, também pode ser chamado de traço (Tr) do tensor resultante caso os índices não estivessem contraídos. A partir da seguinte propriedade de uma matriz M ,

$$\text{Tr} \left(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{\partial (\ln \det M)}{\partial x^\lambda}, \quad (2.80)$$

temos que a equação (2.79) pode ser escrita como

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln g = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda}. \quad (2.81)$$

Podemos então verificar (2.78) se nela aplicarmos a regra de Leibniz e fizermos uso de (2.81).

Rotacional:

$$\nabla_\nu V_\mu - \nabla_\mu V_\nu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (2.82)$$

Teorema de Gauss

$$\oint V^\mu \sqrt{-g} dS_\mu = \int \nabla_\mu V^\mu \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.83)$$

onde consideramos que dS_μ é a superfície que envolve o volume $d\Omega$.

Teorema de Stokes:

$$\oint V_\mu dx^\mu = \int df^{\mu\nu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \int df^{\mu\nu} (\nabla_\nu V_\mu - \nabla_\mu V_\nu), \quad (2.84)$$

onde $df^{\mu\nu}$ é o elemento da superfície envolvida por dx^μ .

Vemos então que a derivada covariante é simplesmente um operador da relatividade geral que obedece à comutatividade na soma e no produto com escalares, bem como à regra de Leibniz. Sua função é desconsiderar efeitos da métrica para haver concordância com a diferenciação de escalares, mantendo inalterados seus gradientes, que são parte intrínseca da estrutura do espaço-tempo.

2.2.4 Tensor de curvatura

A derivada covariante, ao contrário da derivada parcial, não é em geral comutativa. Para um tensor arbitrário, definimos seu comutador como sendo [30]

$$[\nabla_\kappa \nabla_\nu] V^\lambda = \nabla_\kappa \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\kappa V^\lambda. \quad (2.85)$$

Utilizando a definição da derivada covariante (2.65), temos que

$$\nabla_\nu V^\lambda = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\mu \quad \text{e} \quad \nabla_\kappa V^\lambda = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} V^\mu, \quad (2.86)$$

e aplicando novamente a derivada covariante encontramos os dois termos expressos no comutador de (2.85):

$$\begin{aligned} \nabla_\kappa \nabla_\nu V^\lambda &= \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\mu \right) + \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} \left(\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} V^\mu \right) - \\ &\quad - \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} \left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} V^\mu \right), \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \nabla_\kappa V^\lambda &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} V^\mu \right) + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \left(\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} V^\mu \right) - \\ &\quad - \Gamma^\sigma_{\kappa\nu} \left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} V^\mu \right). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Nosso objetivo agora é subtrair (2.88) de (2.87). Cada uma das duas expressões tem seis termos em seu lado direito. Quando a subtração é efetuada, o primeiro termo das expressões cancela-se, visto que as derivadas de primeira ordem comutam. O mesmo ocorre com o quinto e sexto termo, pois supomos uma métrica na qual $\Gamma^\sigma_{\kappa\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\kappa}$. Finalmente, o segundo termo de (2.87) e (2.88), após o cálculo da derivada fica, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa} (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\mu) = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} V^\mu + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\kappa} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\Gamma^\lambda_{\mu\kappa} V^\mu) = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} V^\mu + \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\nu}, \quad (2.89)$$

onde no segundo termo do lado direito fizemos a troca ($\mu \rightarrow \sigma$), possível pelo fato do índice estar contraído, e que possibilita sua anulação com o terceiro termo de (2.87) e (2.88). Efetuando finalmente a subtração, chegamos em

$$[\nabla_\kappa \nabla_\nu] V^\lambda = \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \right) V^\mu, \quad (2.90)$$

e podemos finalmente definir o tensor de curvatura de Riemann:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa}. \quad (2.91)$$

Este tensor é o único que pode ser construído a partir do tensor métrico e de suas derivadas primeiras e segundas. Ele mede, conforme assumimos em (2.85), a não-comutatividade da derivada covariante. Pode-se demonstrar que a nulidade do tensor de Riemann implica na nulidade do comutador de qualquer tensor.

Em relação à interpretação física do tensor de Riemann, podemos notar que, durante o transporte paralelo de um vetor, suas componentes ao longo de uma

geodésica (o caminho de menor ação) têm que ser as mesmas em todos os pontos da trajetória (o ângulo entre o vetor e a tangente à geodésica mantém-se inalterado) para o caso de um espaço-tempo plano. Já no caso geral que envolva um espaço-tempo curvo, a variação ΔA_μ sofrida por um vetor A_μ transportado paralelamente ao redor de um contorno fechado infinitesimal envolvido pela área $\Delta f^{\nu\kappa}$ é dada por [31]:

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} R^\lambda_{\mu\nu\kappa} A_\lambda \Delta f^{\nu\kappa}. \quad (2.92)$$

É possível abaixar o índice contravariante do tensor de curvatura e definir o tensor de Riemann covariante:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R^\sigma_{\mu\nu\kappa}. \quad (2.93)$$

Usando então a definição da conexão afim apresentada em (2.51) e do tensor de Riemann em (2.91), juntamente com as relações deduzidas em (2.43) e (2.48),

$$g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g_{\lambda\sigma} = -g^{\sigma\rho} (\Gamma^\eta_{\kappa\lambda} g_{\eta\sigma} + \Gamma^\eta_{\kappa\sigma} g_{\eta\lambda}), \quad (2.94)$$

podemos manipular (2.93) e após eliminar os termos repetidos chegamos finalmente a

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) + g_{\eta\sigma} (\Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}). \quad (2.95)$$

Desta última igualdade podemos tirar algumas propriedades de grande importância do tensor de Riemann covariante, lembrando que a conexão afim é simétrica em seus índices inferiores:

(i) Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \quad (2.96)$$

(ii) Anti-simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}; \quad (2.97)$$

desta também segue que $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$ se $\lambda = \mu$ ou se $\nu = \kappa$.

(iii) Ciclicidade

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (2.98)$$

Componentes independentes

O tensor de curvatura de Riemann, por ter quatro índices, tem 256 componentes em quatro dimensões (4^4). Porém, as propriedades (2.96), (2.97) e (2.98) reduzem drasticamente o número de componentes não nulas e independentes, que passam a totalizar 20 no caso mais geral [27].

2.2.5 Tensor de Ricci e escalar de curvatura

Outros tensores podem ser construídos se usarmos o tensor métrico para formar combinações lineares de $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$; as mais utilizadas são as contrações. O tensor de Ricci é definido como

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R^\lambda_{\mu\lambda\kappa}, \quad (2.99)$$

sendo que a propriedade (2.96) mostra que o tensor de Ricci é simétrico, ou seja, $R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}$, fato que lhe confere 10 componentes independentes no caso quadridimensional. Por este motivo, o tensor de Ricci só captura metade da informação do tensor de Riemann, que como visto há pouco possui 20 componentes independentes. As outras 10 componentes restantes formam o chamado tensor de Weyl ($C_{\lambda\mu\nu\kappa}$), um tensor de quarta ordem que tem as mesmas simetrias e propriedades algébricas do tensor de Riemann, porém no qual a curvatura de Ricci sempre se anula ($C^\lambda_{\mu\lambda\kappa} = 0$).

É interessante notar que nenhum outro tensor de segunda ordem que seja não-nulo e linearmente independente de $R_{\mu\kappa}$ pode ser construído por meio de contrações do tensor de Riemann, e isto é consequência direta da propriedade (2.97).

Contraindo o tensor de Ricci definimos o escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \quad (2.100)$$

que relaciona a cada ponto do espaço-tempo um único número real, caracterizando a curvatura intrínseca do espaço-tempo naquele ponto.

2.2.6 Identidades de Bianchi

Se calcularmos a derivada covariante de (2.95) em um ponto de um sistema de coordenadas localmente inercial no qual a conexão afim $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ se anula, chegamos

$${}^a \nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right). \quad (2.101)$$

Agora, permutando os índices ν , κ e η ciclicamente, obtemos as identidades de Bianchi:

$$\nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \nabla_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0. \quad (2.102)$$

Estas equações estão sujeitas ao princípio da covariância geral; então como elas valem em um sistema de coordenadas localmente inercial, têm que valer também em qualquer outro sistema. Lembrando da propriedade (2.75), que diz que a derivada covariante comuta com o levantamento de índices, podemos multiplicar (2.102) por $g^{\lambda\nu}$ e com isso contrair o índice λ com ν :

$$\nabla_\eta R_{\mu\kappa} - \nabla_\kappa R_{\mu\eta} + \nabla_\nu R^\nu_{\mu\kappa\eta} = 0, \quad (2.103)$$

sendo que o sinal negativo vem da aplicação da propriedade de anti-simetria (2.97) para que haja concordância com a definição do tensor de Ricci (2.99). Contraindo novamente, ou seja, multiplicando (2.103) por $g^{\mu\kappa}$ e aplicando outra vez a propriedade de anti-simetria, chegamos a

$$\nabla_\eta R - \nabla_\kappa R^\kappa_\eta - \nabla_\nu R^\nu_\eta = 0. \quad (2.104)$$

Multiplicando (2.104) por $-1/2$, fazendo a troca de índices repetidos no segundo termo ($\kappa \rightarrow \mu$) e no último termo ($\nu \rightarrow \mu$), e inserindo δ^μ_η no primeiro termo apenas para poder agrupar a expressão, obtemos:

$$\nabla_\mu \left(R^\mu_\eta - \frac{1}{2} \delta^\mu_\eta R \right) = 0. \quad (2.105)$$

Finalmente, multiplicando por $g^{\nu\eta}$ e utilizando novamente a propriedade (2.75), chegamos às famosas identidades contraídas de Bianchi:

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0. \quad (2.106)$$

2.2.7 Tensor energia-momento

O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ representa o fluxo do quadrimomento p^μ através da superfície de x^ν constante. Cada componente do tensor energia-momento possui um significado físico: a componente T^{00} é a densidade de energia, as componentes espaço-temporais T^{i0} e T^{0i} são o fluxo de momento e energia e as componentes espaço-espaço T^{ij} representam o fluxo de momento (pressão).

Um exemplo típico de $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento de um fluido perfeito (sem viscosidade ou fluxo de calor) com densidade de massa-energia ρ , pressão p e quadrivelocidade $U^\mu = dx^\mu/d\tau$:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (2.107)$$

A lei de conservação do tensor energia-momento no espaço-tempo plano (no contexto da relatividade restrita) é expressa na forma de um divergente nulo:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (2.108)$$

e utilizando o teorema de Gauss é possível encontrar uma quantidade conservada, o quadrimomento total do sistema já definido em (2.12):

$$p^\mu = \int T^{\mu 0} d^3x. \quad (2.109)$$

No contexto da relatividade geral, a lei de conservação do tensor energia-momento é expresso pela derivada covariante de $T^{\mu\nu}$:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.110)$$

Porém, nesse caso não é possível definir uma quantidade conservada; para isso teríamos que levar em conta também a contribuição do campo gravitacional para o tensor energia-momento.

2.2.8 Equações de campo de Einstein

Vimos na subseção 2.2.2 de que maneira a geometria do espaço-tempo, dada pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, modifica o movimento das partículas. Aqui, mostraremos quem governa o comportamento dessa geometria. Para tal fim, vamos nos valer do princípio da ação mínima:

$$\delta S_T = 0, \quad (2.111)$$

no qual a ação total S_T é descrita em termos da ação do campo gravitacional S_g e da ação da matéria S_m , cujas expressões devem vir de densidades lagrangianas integradas sobre todo o espaço-tempo:

$$S_g \propto \int \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d^4x \quad \text{e} \quad S_m \propto \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.112)$$

onde $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento invariante do espaço-tempo (em (2.42) vimos que g é o determinante do tensor métrico), e $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ e $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ são as densidades lagrangianas do campo gravitacional e da matéria, respectivamente.

O termo \mathcal{L}_g deve necessariamente ser construído a partir de uma quantidade escalar. E uma vez que a métrica propriamente dita ou suas derivadas primeiras podem ser anuladas por uma escolha conveniente de referencial, o escalar em questão precisa conter pelo menos derivadas segundas da métrica. Como já vimos em (2.91), o tensor de curvatura de Riemann satisfaz esta exigência, e sabe-se também que o único escalar independente que pode ser construído a partir do tensor de Riemann é o escalar de curvatura R . Podemos então reescrever (2.112), incluindo também as constantes responsáveis pela normalização e ajuste dimensional das ações [31]:

$$S_T = S_g + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.113)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. Vamos dividir o cálculo das variações em duas partes, uma relativa a cada ação.

Ação do campo gravitacional

Iniciamos aplicando a definição do escalar de curvatura (2.100) na ação gravitacional de (2.113):

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.114)$$

Efetuada uma variação e com o auxílio da regra de Leibniz, temos:

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^4x). \quad (2.115)$$

Para encontrar $\delta \sqrt{-g}$, basta comparar as relações (2.79) e (2.81) e utilizar a propriedade (2.43):

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.116)$$

Isto nos leva a escrever (2.115) como

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x. \quad (2.117)$$

Resta calcular a variação $\delta R_{\mu\nu}$. Lembrando de (2.99) que $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ e fazendo uso da definição do tensor de Riemann (2.91), podemos encontrar a variação

desejada se utilizarmos a regra de Leibniz:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} + \delta \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}. \quad (2.118)$$

Já vimos em (2.55) que, devido à presença de um termo não-homogêneo na regra de transformação da conexão afim, não podemos considerá-la como sendo um tensor. Mas e quanto a sua diferencial ($\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$)? Uma vez que ela significa a diferença entre duas conexões afins definidas num mesmo ponto, e é possível mostrar que em um ponto os dois termos não-homogêneos são iguais, temos que $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$. Podemos então considerar a diferencial da conexão afim como sendo um tensor e assim definir sua derivada covariante:

$$\nabla_{\kappa} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\eta} \delta \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda}. \quad (2.119)$$

Combinando (2.118) e (2.119), podemos escrever $\delta R_{\mu\nu}$ em função das derivadas covariantes de $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \nabla_{\lambda} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}). \quad (2.120)$$

Torna-se possível agora calcular a integral do segundo termo de (2.117):

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} [\nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \nabla_{\lambda} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})] d^4x. \quad (2.121)$$

Uma vez que a derivada covariante do tensor métrico se anula, como visto em (2.73), podemos mover o termo $g^{\mu\nu}$ para dentro dos parênteses, e em seguida realizar por conveniência a troca de índices ($\nu \leftrightarrow \lambda$) no primeiro termo dentro dos colchetes:

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) d^4x. \quad (2.122)$$

Aplicando o teorema de Gauss apresentado em (2.83) na expressão (2.122), transformamos a integral de volume em uma integral de superfície, que se anula na fronteira de integração:

$$\int \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) d^4x = \oint \sqrt{-g} (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) dS_{\mu} = 0. \quad (2.123)$$

Então, de (2.117), a variação da ação do campo gravitacional é:

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.124)$$

Ação do campo de matéria

Variando a ação do campo de matéria em (2.113):

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int \delta (\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.125)$$

onde definimos $T_{\mu\nu}$ como sendo o tensor energia-momento para este caso, que pode ser escrito a partir de (2.125) da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.126)$$

Ação total

De (2.124) e (2.125), temos que a variação da ação total é:

$$\delta S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (2.127)$$

Como o termo $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário, temos:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.128)$$

que são as equações do campo gravitacional de Einstein [27, 28, 29, 30] e definimos $G_{\mu\nu}$, o chamado tensor de Einstein.

O lado esquerdo das equações de Einstein satisfaz as identidades contraídas de Bianchi, já deduzidas em (2.106). Como consequência, temos que a derivada covariante de seu lado direito é também nula e as fontes do campo gravitacional devem obedecer à lei de conservação do tensor energia-momento (2.110), tornando consistente o desenvolvimento feito até agora.

Além disso, é de suma importância para a Cosmologia o fato de que, ao introduzir mais um termo linear em $g_{\mu\nu}$ em (2.128), as identidades de Bianchi continuam sendo satisfeitas (pois como demonstrado em (2.73) sabemos que $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$), e temos então:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.129)$$

onde Λ é chamada de constante cosmológica, que foi introduzida por Einstein para possibilitar a existência de soluções cosmológicas estacionárias. Conforme veremos no capítulo 3, este termo é atualmente associado à energia de vácuo e à energia escura, agindo como fonte gravitacional e por isso figurando no lado direito de (2.129).

Podemos ainda reescrever as equações de Einstein (2.128) de uma maneira diferente ao impor uma contração com $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \quad \therefore \quad R = \frac{8\pi G}{c^4}T, \quad (2.130)$$

pois, de acordo com (2.41), $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$ num espaço quadridimensional. Ainda, $T = T^\mu_\mu$ é o traço do tensor energia-momento. Substituindo (2.130) em (2.128), encontramos

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (2.131)$$

Para o vácuo, $T_{\mu\nu}$ é nulo e as equações de Einstein são simplesmente

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.132)$$

2.3 Aplicação

Nesta seção vamos aplicar a teoria da relatividade geral para uma métrica específica, a fim de obter as equações diferenciais correspondentes.

O procedimento usado é descrito neste parágrafo. Em primeiro lugar precisamos dispor de uma métrica que nos informe a geometria do espaço-tempo; é a partir dela que todas as outras quantidades serão calculadas. Em seguida, com as derivadas dessa métrica encontramos a conexão afim. Depois, a partir destas últimas juntamente com suas derivadas calculamos o tensor de curvatura de Riemann, e contraindo-o com o tensor métrico encontramos o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Então, definindo também um tensor energia-momento, já teremos os elementos suficientes para resolver as equações de Einstein para a métrica em questão, e encontraremos um conjunto de equações diferenciais que descreverão nosso modelo baseado na métrica utilizada.

2.3.1 Métrica de Robertson-Walker

A relação entre o intervalo diferencial invariante ds^2 e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, já definida em (2.36), é escrita como

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.133)$$

Considerando um espaço tridimensional homogêneo (igual em todos os pontos) e também isotrópico (igual em todas as direções), a métrica mais geral que pode ser construída é a chamada métrica de Robertson-Walker [27]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.134)$$

onde $a(t)$ representa o fator de escala (o espaço pode sofrer expansão ou contração) e k é a chamada constante de curvatura, que pode representar três situações: $k = 0$ para um espaço plano, $k > 0$ para um espaço esférico (fechado) e $k < 0$ para um espaço hiperbólico (aberto).

Comparando (2.133) com (2.134), temos que o tensor métrico é dado por:

$$g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2 / (1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.135)$$

Faremos aqui os índices gregos assumirem os valores (t, r, θ, ϕ) . Por isso, de (2.135) vemos que as únicas componentes da métrica que não se anulam são g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$.

2.3.2 Cálculo do tensor de Ricci e do escalar de curvatura

A partir de (2.51), podemos calcular todos os elementos da conexão afim. Por exemplo:

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{1}{2} g^{\nu t} \left(\frac{\partial g_{r\nu}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{\nu r}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial x^\nu} \right), \quad (2.136)$$

lembrando que o índice repetido ν está somado implicitamente, conforme (2.5). Os dois primeiros dentro do parênteses só não se anulam se $\nu = r$, mas nesse caso $g^{\nu t}$ se anularia. Portanto resta somente o último termo entre parênteses, e somente para $\nu = t$:

$$\Gamma^t_{rr} = -\frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{rr}}{\partial x^t} = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad (2.137)$$

onde suprimimos o argumento de $a(t)$ e o ponto representa derivada temporal. Analogamente, podemos calcular os elementos restantes não-nulos da conexão afim, lembrando de (2.35) que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$:

$$\Gamma^t_{\theta\theta} = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma^t_{\phi\phi} = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \quad \Gamma^r_{tr} = \Gamma^\theta_{t\theta} = \Gamma^\phi_{t\phi} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.138)$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r(1 - kr^2)\sin^2\theta, \quad (2.139)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta, \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta \cos\theta. \quad (2.140)$$

O próximo passo é calcular o tensor de curvatura de Riemann. Isso para podermos contraí-lo e encontrar o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, que serão utilizados nas equações de Einstein. Por exemplo, para calcular R_{tt} , utilizamos inicialmente (2.99):

$$R_{tt} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda t \nu t} = g^{tt} R_{tttt} + g^{rr} R_{rt rt} + g^{\theta\theta} R_{\theta t \theta t} + g^{\phi\phi} R_{\phi t \phi t}. \quad (2.141)$$

Mas a nossa definição do tensor de Riemann (2.91) é para um tensor misto; precisamos portanto deixá-lo covariante em todos os índices, como feito em (2.93):

$$R_{tttt} = g_{t\sigma} R^\sigma_{ttt} = g_{tt} R^t_{ttt} = 0. \quad (2.142)$$

Na soma implícita acima só interessa o caso $\sigma = t$, pois o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tem somente elementos nulos fora da diagonal principal. E a partir de (2.137)-(2.140) vemos que todos os Γ^λ_{tt} se anulam, o que anula também a componente em questão do tensor de Riemann por (2.91). Usando o mesmo raciocínio calculamos $R_{rt rt}$:

$$\begin{aligned} R_{rt rt} &= g_{r\sigma} R^\sigma_{rt t} = g_{rr} R^r_{rt t} = g_{rr} \left(\frac{\partial \Gamma^r_{tr}}{\partial x^t} - \overbrace{\frac{\partial \Gamma^r_{tt}}{\partial x^r}}^{=0} + \Gamma^\eta_{tr} \Gamma^r_{t\eta} - \overbrace{\Gamma^\eta_{tt} \Gamma^r_{r\eta}}^{=0} \right) \\ &= g_{rr} \left(\frac{\partial \Gamma^r_{tr}}{\partial x^t} + \Gamma^t_{tr} \overbrace{\Gamma^r_{tt}}^{=0} + \Gamma^r_{tr} \Gamma^r_{tr} + \overbrace{\Gamma^\theta_{tr} \Gamma^r_{t\theta}}^{=0} + \overbrace{\Gamma^\phi_{tr} \Gamma^r_{t\phi}}^{=0} \right) \\ &= \frac{a^2}{1 - kr^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = \frac{a\ddot{a}}{1 - kr^2}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

E, de forma análoga, as duas outras componentes que faltam:

$$R_{\theta t \theta t} = a\ddot{a}r^2, \quad R_{\phi t \phi t} = a\ddot{a}r^2 \sin^2\theta. \quad (2.144)$$

Finalmente, aplicando (2.142)-(2.144) em (2.141), encontramos a primeira componente do tensor de Ricci:

$$R_{tt} = 3\frac{\ddot{a}}{a}. \quad (2.145)$$

As outras três componentes podem ser calculadas com o mesmo procedimento. Seus valores são:

$$R_{rr} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (2.146)$$

$$R_{\theta\theta} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2, \quad (2.147)$$

$$R_{\phi\phi} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2\theta. \quad (2.148)$$

Naturalmente há outras maneiras menos trabalhosas de fazer esse cálculo. Uma delas seria usando as propriedades de espaços maximamente simétricos (como é o caso da métrica de Robertson-Walker), que tem como uma de suas propriedades o fato de que $R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) g_{ij}/a^2$.

O cálculo do escalar de curvatura vem diretamente de sua definição (2.100) com os resultados (2.145)-(2.148), uma vez que o tensor métrico é puramente diagonal:

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.149)$$

2.3.3 Forma do tensor energia-momento

O último termo das equações de Einstein, o tensor energia-momento, será descrito como um fluido perfeito, conforme apresentado em (2.107). Vamos considerar um sistema de coordenadas chamado de comóvel, ou seja, que se move junto com o fluido (maiores detalhes no capítulo 3). Por isso, em (2.107) faremos $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$, de tal forma que $U^i = dx^i/d\tau = 0$, $U^t = dx^t/d\tau = c dt/d\tau = c$ por causa de (2.13) com $\vec{v} = 0$, e exista a condição de normalização $U^\mu U_\mu = c^2$. Dessa forma, a expressão para o tensor energia-momento fica

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (2.150)$$

2.3.4 Equações do modelo

Temos agora todos os elementos necessários para resolver as equações de Einstein. Utilizaremos a sua forma mais geral (2.129), que inclui também a chamada

constante cosmológica. Faremos uso das componentes do tensor de Ricci (2.145)-(2.148), do tensor métrico (2.135), do escalar de curvatura (2.149) e do tensor energia-momento (2.150).

Inicialmente vamos considerar somente as componentes temporais dos tensores:

$$R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R - \Lambda g_{tt} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{tt}. \quad (2.151)$$

Substituindo e simplificando, chegamos à chamada equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.152)$$

Das componentes espaciais (qualquer uma delas) obtemos

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -8\pi G\frac{p}{c^2}. \quad (2.153)$$

Podemos utilizar (2.152) para simplificar (2.153) e obter a chamada equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.154)$$

Capítulo 3

Cosmologia

3.1 Fundamentação

3.1.1 Lei de Hubble

Uma das principais constatações das observações cosmológicas é que quase tudo no Universo parece estar se afastando da Terra, e quanto mais longe está um objeto, maior parece sua velocidade de recessão [32, 33]. Essas velocidades são medidas pelo desvio para o vermelho z (que chamaremos aqui de *redshift*), de acordo com a aplicação do efeito Doppler para ondas luminosas:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \simeq \frac{v}{c}, \quad (3.1)$$

onde λ_{obs} é o comprimento de onda que observamos e λ_{em} é o comprimento de onda emitido pelas galáxias. Em 1929, o astrônomo Edwin Hubble realizou suas observações e descobriu que a velocidade de recessão das galáxias em relação à Terra é proporcional à distância que as separam de nós. Isto deu origem à chamada lei de Hubble:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (3.2)$$

onde H_0 é conhecida como constante de Hubble, e seu valor hoje é tido como sendo $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [34] (Mpc representa a unidade de comprimento Megaparsec e $1 \text{ Mpc} = 3,09 \cdot 10^{22} \text{ m}$). Isto significa por exemplo que uma galáxia distante da Terra de 100 Mpc tem uma velocidade de recessão de aproximadamente 7200 km/s. Chamamos H_0 de *constante* de Hubble porque ela possui um valor constante hoje,

mas é necessário notar que ela pode mudar com o tempo, como de fato ocorre. A figura 3.1 apresenta os dados experimentais que confirmam a lei de Hubble.

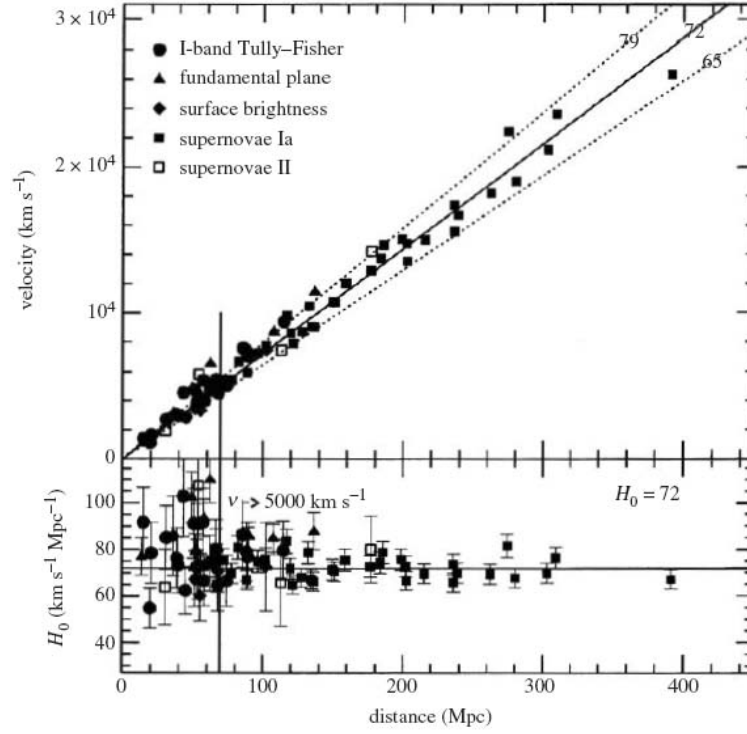


Figura 3.1: Comparação entre cinco experimentos para determinar o parâmetro de Hubble [34].

A descoberta da lei de Hubble permite a introdução de um sistema de coordenadas diferente. Para simplificar os cálculos, escolhemos um sistema que acompanha a expansão do Universo, formado pelas coordenadas comóveis:

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}. \quad (3.3)$$

Como a expansão do Universo parece ser uniforme, relacionamos a distância real \vec{r} com a distância comóvel \vec{x} (no capítulo 2 utilizamos a letra r em alusão às coordenadas comóveis, em linha com a literatura), sendo que as galáxias parecem estar em posições fixas nas coordenadas comóveis. O termo $a(t)$ é o chamado fator de escala do Universo e tem um papel essencial, pois mede a taxa de expansão do Universo. Usualmente se convencionou que hoje ($t = t_0$) o fator de escala é unitário, ou seja, $a(t_0) = 1$.

Combinando (3.2) com (3.3), é possível escrevermos a lei de Hubble em

termos do fator de escala:

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (3.4)$$

Podemos definir então o parâmetro de Hubble H :

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.5)$$

e a lei de Hubble pode ser escrita como $\vec{v} = H\vec{r}$. O parâmetro de Hubble medido hoje é chamado de H_0 , e o fato de ser positivo implica que o Universo está em expansão, e não em contração ou estático.

Podemos também relacionar o fator de escala com o *redshift* apresentado em (3.1) da seguinte forma:

$$1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} = \frac{1}{a(t_{em})}, \quad (3.6)$$

onde usamos o já mencionado fato de que $a(t_0) = 1$. Este resultado enfatiza que conforme o Universo se expande os comprimentos de onda aumentam em proporção direta. Por exemplo, se observamos um comprimento de onda duplicado em relação ao esperado, o Universo devia ter metade do tamanho atual quando a luz foi emitida.

Embora em grandes escalas o nosso Universo seja preenchido por galáxias, e essas galáxias se distribuam em pequenos grupos ou também em grandes estruturas que podem agrupar milhares de galáxias, as observações comprovam que, em escalas de distância ainda maiores (100 Mpc ou mais), o Universo começa a ficar homogêneo. Isto dá sustentação ao princípio cosmológico, o pilar da Cosmologia moderna.

O princípio cosmológico confere ao Universo duas características distintas em grandes escalas: homogeneidade e isotropia. Homogeneidade significa que o Universo é igual em todos os pontos, e isotropia que ele é igual em todas as direções. Mas naturalmente o princípio cosmológico não é exato, e então o Universo não é exatamente homogêneo e isotrópico; isso apenas ocorre em situações nas quais galáxias ou grupos de galáxias são tratados como se fossem meros pontos.

Poderia parecer que o princípio cosmológico está sendo violado, considerando que (conforme a lei de Hubble) tudo está se afastando da Terra – poderíamos pensar que somos o centro do Universo. Entretanto, qualquer observador vê praticamente todos os objetos se afastando dele com uma velocidade proporcional à distância, e o Universo parece o mesmo independente da galáxia da qual for observado.

3.1.2 Equações básicas e o modelo padrão

De agora em diante neste capítulo utilizaremos, por conveniência, a velocidade da luz como $c = 1$.

Na subseção 2.3.1 dissemos que a métrica mais geral possível para um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico é a métrica de Robertson-Walker. Por essa razão, ela é utilizada em Cosmologia para a dedução de todas as equações a partir da relatividade geral.

Ainda devido às propriedades de homogeneidade e isotropia, podemos considerar o Universo como sendo um fluido perfeito, com densidade ρ e pressão p . Isto nos leva a uma expressão para o tensor energia-momento, já apresentada em (2.150):

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (3.7)$$

Equação de Friedmann

A equação de Friedmann, deduzida em (2.152), é a equação mais importante da Cosmologia. Aqui definimos $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/8\pi G$ para fazer com que esse termo seja incorporado à densidade total ρ :

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.8)$$

A equação de Friedmann descreve o comportamento da expansão do Universo (representado pelo fator de escala) com relação à densidade do Universo e à sua curvatura.

Para analisarmos os efeitos da constante k na equação de Friedmann, que representa a curvatura do Universo, podemos considerar que a densidade total ρ decresce com a^3 (como se fosse por exemplo matéria não-relativística e não-interagente), de tal forma que para $a(t)$ arbitrariamente grande o termo de curvatura domine. Neste caso podemos notar que, para $k = 0$, a expansão tende a ficar cada vez mais lenta conforme $a(t)$ aumenta, mas nunca pára (geometria plana e Universo plano). Se $k < 0$, chegará um tempo no qual a expansão dar-se-á a uma taxa constante (geometria hiperbólica e Universo aberto, expandindo-se para sempre). E finalmente, se $k > 0$, é possível que o lado direito da equação de Friedmann se anule e o Universo pare de se expandir, iniciando então uma fase de contração (geometria esférica e Universo fechado).

Equação da aceleração

Outra equação de grande importância, derivada da teoria da relatividade geral em (2.154), é a chamada equação da aceleração. Aqui utilizamos novamente a definição $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/8\pi G$ e introduzimos também o fato de que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ (veremos o porquê logo mais), e fazemos a densidade total ρ e a pressão total p incorporarem ρ_Λ e p_Λ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.9)$$

Essa equação descreve a aceleração do fator de escala e mostra que, além da densidade, qualquer pressão positiva que possua o fluido que descreve o Universo contribui para desacelerar sua expansão. Ainda de acordo com a equação da aceleração, a única maneira de fazer com que o Universo não esteja sempre desacelerando seria considerar uma pressão negativa (aqui desconsideramos a possibilidade de massas e densidades negativas).

Equação do fluido

Para resolver a equação de Friedmann é necessário que se saiba como a densidade ρ do Universo evolui com o tempo. Combinando a equação da aceleração (3.9) com a derivada temporal da equação de Friedmann (3.8), é possível obter uma terceira, chamada de equação do fluido:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.10)$$

Essa equação também poderia ser encontrada se calculássemos (2.110) para o tensor energia-momento apresentado em (3.20), ou seja, se impuséssemos que o tensor energia-momento tem derivada covariante nula e não viola a lei de conservação de energia.

Dentro do parênteses de (3.10) há dois termos que contribuem para variações na densidade. O primeiro corresponde à diluição da densidade com o aumento de volume; o segundo mostra que conforme o volume aumenta, a pressão realiza trabalho e com isso transfere energia para o campo gravitacional. Naturalmente é necessário ainda encontrar uma expressão para p . Isso é geralmente feito com a utilização da equação de estado

$$p = \omega\rho. \quad (3.11)$$

Para chegar a (3.9) utilizamos o fato de que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, e isso pode ser explicado com base na equação do fluido (3.10) para a porção de ρ referente à constante cosmológica. Para tanto, usamos o fato de que a constante cosmológica não interage com nenhum outro constituinte do Universo, e portanto obedece sozinha a equação do fluido:

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3H(\rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0. \quad (3.12)$$

E como ρ_Λ é constante por definição, obrigatoriamente temos que

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (3.13)$$

Isto significa que, conforme o Universo expande, trabalho é realizado no fluido da constante cosmológica, e é por isso que sua densidade permanece constante mesmo com a expansão volumétrica.

3.1.3 Alguns parâmetros observacionais

Parâmetros de densidade

A equação de Friedmann (3.8) relaciona a expansão do Universo com sua densidade e curvatura, e qualitativamente os efeitos da curvatura já foram analisados em 2.1.2. Para um dado valor de H , existe um valor específico de ρ necessário para tornar a curvatura do Universo plana ($k = 0$). Ele é conhecido como densidade crítica:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.14)$$

Uma vez que conhecemos o valor de H_0 , é possível calcular que a densidade crítica hoje vale $\rho_c(t_0) \equiv \rho_c^0 \simeq 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$.

Se nas medidas observacionais constatar-se que no Universo há mais matéria do que expressa a densidade crítica, saberemos que nosso Universo é fechado com $k > 0$, e vice-versa. Além disso, a densidade crítica serve como escala para a densidade do Universo, pois é bastante comum que se compare uma densidade qualquer com a densidade crítica, o que leva à definição do parâmetro de densidade Ω :

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (3.15)$$

onde o índice i representa os diversos constituintes da densidade que desejemos considerar. É interessante notar que Ω_i é em geral função do tempo, pois mesmo que ρ_i

seja constante (como acontece por exemplo com ρ_Λ), a densidade crítica varia com o tempo devido a (3.14). Combinando (3.8) e (3.15), temos:

$$\Omega_{tot} = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.16)$$

onde chamamos de Ω_{tot} o parâmetro de densidade relativo à densidade total do Universo. O caso $\Omega = 1$ é bastante especial, visto que então $k = 0$. E como k é constante, a equação permanece $\Omega = 1$ para todos os tempos, fato válido independente de que constituintes formem a densidade ρ . Na seção 3.2 veremos os diversos componentes que formam a densidade e suas medidas experimentais.

O parâmetro de desaceleração e a expansão acelerada

Sabe-se que o Universo não só está em expansão, mas também que a taxa de expansão varia com o tempo. O parâmetro de desaceleração é uma maneira de quantificar essa variação. Expandindo o fator de escala $a(t)$ em torno do tempo presente t_0 e dividindo por $a(t_0)$, obtemos

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \quad (3.17)$$

Esta equação define o parâmetro de desaceleração hoje (q_0), mas podemos generalizá-lo para tempos arbitrários:

$$q \equiv -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (3.18)$$

Quanto mais rápida for a desaceleração à qual o Universo está submetido, maior será o valor de q_0 . Devido à presença do termo \ddot{a}/a , o parâmetro de desaceleração está intimamente ligado com a densidade total ρ e a pressão total p do Universo, conforme a equação da aceleração (3.9). Se quiséssemos calcular quanto vale q_0 , teríamos que saber quanto valem hoje ρ e p ; mas como não conhecemos a pressão, o que podemos fazer é medir q_0 de outras maneiras.

As primeiras medidas convincentes de q_0 foram feitas recentemente por grupos de pesquisa que estudam supernovas distantes do tipo Ia [5]. É fato que não é possível determinar a distância de separação de objetos muito distantes de nós pelo método da paralaxe, por isso utilizam-se as chamadas velas-padrão: acredita-se que as supernovas do tipo Ia apresentam um brilho cuja magnitude absoluta é muito bem conhecida. Dessa forma, utiliza-se a lei do inverso dos quadrados para descobrir sua distância relativa à Terra por meio da magnitude relativa medida daqui. Sabendo-se

as distâncias dos objetos, pode-se analisar detalhadamente seu *redshift*, e daí tiram-se conclusões sobre parâmetros cosmológicos.

Para surpresa geral, o resultado obtido é que o Universo aparenta estar sob uma expansão acelerada hoje em dia, ou seja, $q_0 < 0$, conforme mostra o lado esquerdo da figura 3.2. Como esse fato vêm sendo firmemente corroborado, é necessário que encontremos teorias capazes de fazer esse tipo de previsões.

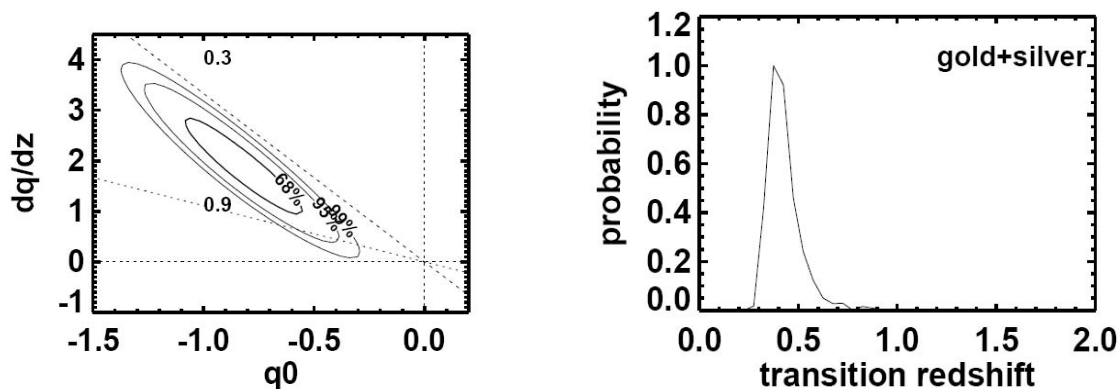


Figura 3.2: Valores experimentais do parâmetro de desaceleração [5]. Esquerda: dq/dz vs. q_0 ; direita: *redshift* de transição de q .

Outra medida interessante relativa ao parâmetro de desaceleração diz respeito ao *redshift* de transição (z_T) que indica o ponto no qual o Universo passou de uma fase de expansão desacelerada para o atual estágio de expansão acelerada. Podemos ver um gráfico das probabilidades do *redshift* de transição no lado direito da figura 3.2.

Distância de luminosidade

A distância de luminosidade é uma maneira de expressar a quantidade de luz recebida de um objeto distante, representando a distância a que o objeto parece estar, assumindo-se a validade do decréscimo da intensidade luminosa governado pela lei do inverso do quadrado da distância. Na verdade, a distância de luminosidade não representa a distância real do objeto, pois não leva em conta uma possível curvatura do Universo e nem sua expansão. Podemos definir a distância de luminosidade d_L de um objeto em termos de sua luminosidade absoluta L (a potência total emitida pela fonte) e sua luminosidade aparente l (a potência por unidade de área que chega

até nós):

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \quad (3.19)$$

E aqui, assim como no caso do parâmetro de desaceleração, é necessário que se use as velas-padrão para medidas relativas a objetos distantes.

Vamos agora calcular teoricamente a distância de luminosidade com base nos parâmetros já apresentados. No espaço euclidiano, a luminosidade aparente da fonte seria simplesmente $l = L/4\pi d^2$, onde d é a distância própria. Entretanto, é necessário levar em conta dois fatos relativos aos fótons de luz que vêm do objeto até nós: eles estão sujeitos ao *redshift* relativístico e ao efeito Doppler. Cada um desses fatos contribui individualmente com um fator de atenuação $1/a(t) = (1+z)$, fazendo com que

$$l = \frac{L}{4\pi d^2 (1+z)^2}. \quad (3.20)$$

Ainda precisamos calcular a distância própria d . Para tanto, lançamos mão da métrica de Robertson-Walker (2.134) e consideramos que a luz se propaga radialmente ($d\theta = d\phi = 0$), bem como um espaço sem curvatura ($k = 0$). Podemos então utilizar a equação que dá o comprimento de uma curva em função da métrica (2.38), descartando a componente temporal (uma vez que estamos interessados apenas na distância espacial). Faremos a integral de 0 até r , sendo que r é a distância comóvel percorrida pela luz:

$$d = \int_0^r \sqrt{-g_{rr} dx^r dx^r} = a(t) \int_0^r dr = a(t) r. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.20) e o resultado em (3.19), e trocando r por r_0 e $a(t)$ por a_0 , uma vez que as medidas são realizadas hoje:

$$d_L = a_0 r_0 (1+z). \quad (3.22)$$

Agora só resta calcular r_0 . Continuamos com a mesma métrica de Robertson-Walker sem componentes angulares e com $k = 0$ e impomos que $ds = 0$, ou seja, que para a luz é como se todos os pontos no espaço-tempo fossem equivalentes, o que é uma propriedade básica da relatividade restrita. Desta forma, obtemos

$$\frac{c dt}{a(t)} = dr. \quad (3.23)$$

Integrando:

$$\int_0^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} dr. \quad (3.24)$$

Como a distância de luminosidade é medida em função do *redshift*, convém mudar de variável:

$$dt = \frac{dt}{da} \frac{da}{dz} dz = -\frac{1}{\dot{a}(t)} \frac{1}{(1+z)^2} dz = -\frac{a(t)}{H} dz. \quad (3.25)$$

Substituindo em (3.24):

$$r_0 = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (3.26)$$

Chegamos à nossa expressão final da distância de luminosidade aplicando (3.26) em (3.22) e considerando que $a_0 = 1$:

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (3.27)$$

Na verdade, as medidas existentes não são exatamente de d_L ; existem também parâmetros empíricos ou ainda mantidos por razões históricas. O que se mede de fato é a diferença entre a magnitude bolométrica aparente m e a magnitude bolométrica absoluta M de uma fonte, e a expressão para a diferença entre magnitudes μ_0 é

$$\mu_0 = m - M = 25 + 5 \log_{10} d_L. \quad (3.28)$$

Podemos ver as medidas atuais de μ_0 na figura 3.3.

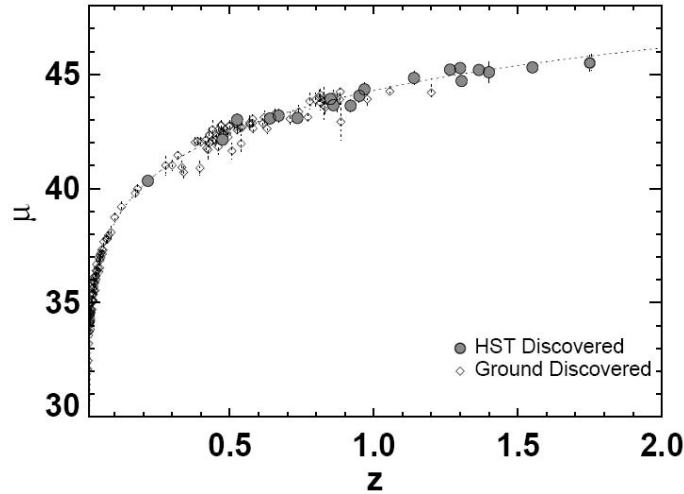


Figura 3.3: Diferença μ_0 vs. *redshift* z [5].

3.1.4 Radiação cósmica de fundo

Já vimos anteriormente que a lei de Hubble prevê que o Universo está expandindo, o que significa que conforme voltamos para o passado seu tamanho deve ir tornando-se cada vez menor. Por isso, houve um tempo no qual toda a matéria deve ter estado bastante comprimida, e estudos de Gamow, Alpher e Herman no final da década de 40 previram teoricamente a existência de uma radiação liberada durante a formação dos elementos químicos. Este efeito foi observado experimentalmente pela primeira vez em 1965 por Penzias e Wilson, que encontraram vestígios de uma radiação que hoje sabe-se vir de todas as direções do espaço de maneira altamente isotrópica. A radiação descoberta possui também um espectro enormemente concorde com o de corpo negro para uma temperatura que se mede atualmente como sendo $2,725 \pm 0,001$ K [35], conforme mostra a figura 3.4.

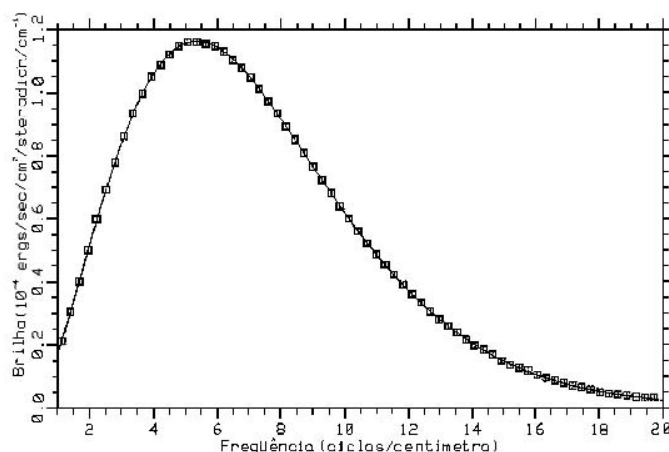


Figura 3.4: Espectro da radiação cósmica de fundo [32].

É sabido que para uma distribuição de corpo-negro a densidade total de energia de radiação obedece à relação de proporcionalidade $\epsilon_{rad} \propto T^4$ (lei de Stefan-Boltzmann). Além disso, conforme o Universo expande a densidade de fótons da radiação decresce com $1/a^3$ por causa da diluição volumétrica e com $1/a$ devido ao efeito Doppler relativístico, o que resulta em $\epsilon_{rad} \propto 1/a^4$. Combinando as duas relações, chegamos ao importante resultado

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (3.29)$$

Isto significa que conforme voltamos para trás no tempo (a diminui), a temperatura T da radiação cósmica de fundo aumenta de modo inversamente proporcional.

Hoje já se consegue explicar de maneira contundente a origem da radiação cósmica de fundo. Para tanto, o principal fato necessário é que o átomo de hidrogênio possui uma energia de ionização mínima: com 13,6 eV é possível arrancar um elétron no estado fundamental. Isto significa que quando o Universo era quente o suficiente, os fótons facilmente teriam essa energia e manteriam o hidrogênio completamente ionizado. E conforme o Universo expandiu-se e foi esfriando, os fótons perderam energia e tornaram-se menos capazes de ionizar átomos desta maneira. Depois de algum tempo, o Universo mudou de opaco para completamente transparente, e a partir de então os fótons começaram a viajar livremente e a matéria se desacoplou da radiação. Definiu-se um processo que chamamos de *desacoplamento*, que ocorreu quando a temperatura do Universo era em torno de 3000 K e sua idade aproximadamente 379.000 anos [36].

Porém, apesar da radiação cósmica de fundo parecer quase completamente independente da direção do céu observada, experimentos recentes [36, 37, 38] vêm dando especial atenção às chamadas flutuações ou anisotropias de sua distribuição. Ou seja, observa-se uma dependência da temperatura do Universo com a direção observada. O valor dessas anisotropias é bastante baixo, de aproximadamente uma parte em 10^5 – ou da ordem de $10\ \mu\text{K}$. Mesmo assim, a descoberta das anisotropias teve um profundo impacto na Cosmologia, pois permite que observemos como o Universo era com 379.000 anos de idade, isto é, aproximadamente 13,7 bilhões de anos atrás. Surge então uma nova alternativa para o estudo da formação de estruturas.

Para podermos extrair informações dos mapas da radiação cósmica de fundo, precisamos nos valer de algumas ferramentas estatísticas. Uma destas ferramentas nos possibilita compor um espectro que representa a amplitude das flutuações em função da escala angular, conforme mostra a figura 3.5. Os picos são reflexos das chamadas oscilações acústicas no plasma, e podemos associá-los com os modos harmônicos desta oscilação. O primeiro pico representa o harmônico fundamental – a maior onda que poderia aparecer no meio, que define o tamanho do Universo observável ou escala angular do horizonte. Os outros picos estão ligados aos outros harmônicos. A consequência dessa associação é que podemos determinar algumas das quantidades fundamentais do Universo (idade, composição, geometria) com base no número, largura, altura e posição dos picos.

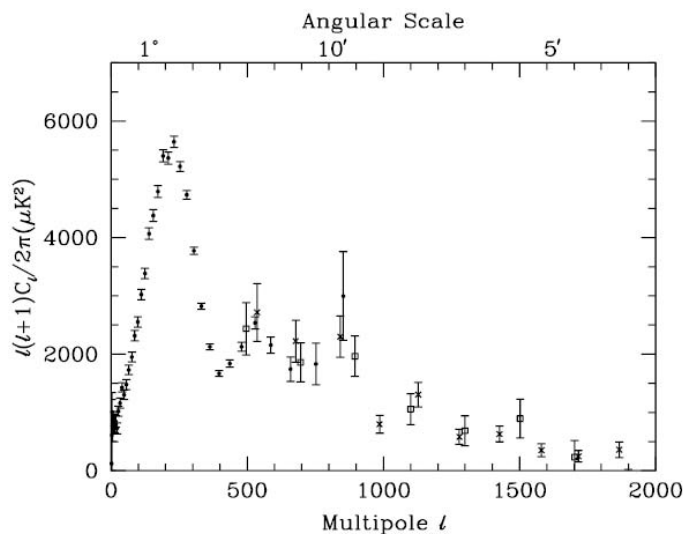


Figura 3.5: Anisotropias da radiação cósmica de fundo, combinando três experimentos [39]

3.2 Densidade do Universo

Na equação (3.14) apresentamos a chamada densidade crítica do Universo, necessária para que sua geometria seja plana: $\rho_c^0 \simeq 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$. Também comentamos que é comum comparar a densidade dos diversos componentes com ρ_c , conforme (3.14). Mas é importante ressaltar que não há necessidade de que a densidade do Universo seja justamente ρ_c .

Nesta seção vamos abordar os diversos constituintes do Universo, somando sua contribuição e procurando por uma densidade total [32, 33].

3.2.1 Bárions

O mundo à nossa volta é repleto de matéria bariônica (basicamente prótons e nêutrons); sabemos que é deste tipo de matéria que são formados os planetas e estrelas. Consideramos aqui uma matéria não relativística, não interagente e que não exerce pressão ($p = 0$). Isso tudo é uma boa aproximação se a usarmos para os átomos do Universo que já esfriaram, estão separados por uma distância relativamente grande e raramente interagem, e é também uma descrição plausível para o grande número de galáxias que não interagem entre si (a não ser gravitacionalmente) que podemos observar. Resolvendo a equação do fluido (3.10) para um constituinte

com as características mencionadas, $\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0$, obtemos como solução

$$\rho_b = \frac{\rho_b^0}{a^3} = \rho_b^0 (1+z)^3, \quad (3.30)$$

onde ρ_b^0 é a densidade de matéria observada hoje, e também consideramos que $a(t_0) = 1$ e que hoje o *redshift* logicamente é nulo. É interessante agora conhecermos o valor de ρ_b^0 .

Inicialmente é possível olhar para todas as estrelas de uma grande região do céu e calcular sua densidade, e supor que ela deve ser a mesma em todo o Universo. É preciso levar em conta também que em grupos de galáxias há grandes quantidades de gás quente que emitem luz no comprimento dos raios-X, e ainda que existem estrelas pouco massivas, com pouca ou nenhuma luminosidade. Tudo isso juntamente com a teoria da nucleossíntese, que estuda a formação de elementos leves [40], restringe a densidade de toda a matéria bariônica no Universo da seguinte maneira:

$$\Omega_b^0 = \frac{\rho_b^0}{\rho_c^0} = 0,045 \pm 0,003. \quad (3.31)$$

3.2.2 Radiação

Da teoria da relatividade restrita sabemos que os fótons obedecem à equação de estado $p_r = \omega_r \rho_r = \rho_r c^2/3$, e como estamos fazendo $c = 1$, temos que

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r, \quad (3.32)$$

o que faz com que a equação do fluido (3.10) fique $\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0$ se desconsiderarmos interações com outros constituintes. Assim sendo, a componente de radiação se comporta da seguinte maneira:

$$\rho_r = \frac{\rho_r^0}{a^4} = \rho_r^0 (1+z)^4, \quad (3.33)$$

onde ρ_r^0 é a densidade de radiação observada hoje, cujo valor é necessário que conheçamos. Para um cálculo mais preciso, precisamos utilizar a equação

$$\rho_r = \frac{g_*(z)}{2} \rho_r^0 (1+z)^4, \quad (3.34)$$

na qual a função $g_*(z)$ representa os graus de liberdade efetivos das partículas que compõem a radiação e assume os valores [33]

$$g_*(z) = \begin{cases} 2 & \text{para } z \lesssim 1000, \\ 3,36 & \text{para } z \gtrsim 1000. \end{cases} \quad (3.35)$$

O intervalo $z \lesssim 1000$ corresponde ao período em que os fótons dominam, e quando $z \gtrsim 1000$ passamos para o estágio em que é mais intensa a contribuição dos neutrinos relativísticos.

Agora só resta conhecer o valor de ρ_r^0 . Já vimos anteriormente que uma radiação altamente isotrópica com espectro de corpo negro de temperatura $T = 2,725 \pm 0,001\text{K}$ permeia todo o Universo. Essa temperatura de corpo negro pode ser convertida para energia pela lei de Stefan-Boltzmann, e podemos fazer a representação por meio do parâmetro de densidade:

$$\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0} \simeq 4,76 \cdot 10^{-5}. \quad (3.36)$$

3.2.3 Matéria escura

Há várias evidências observacionais de que existe mais matéria além da bariônica. O procedimento mais utilizado é a análise do movimento de diversos tipos de objetos astronômicos, em conjunto com o cálculo da incapacidade da matéria bariônica reproduzir as forças gravitacionais observadas.

Uma das aplicações mais interessantes é a análise da curva de rotação das galáxias [1], com a observação da velocidade da matéria girando em um disco espiral em função do raio. Pela mecânica newtoniana, uma galáxia com massa $M(R)$ em um raio R precisa apresentar uma velocidade de rotação dada por

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}. \quad (3.37)$$

Porém, conforme podemos ver na figura 3.6, as observações indicam uma velocidade muito maior do que a prevista pela lei de gravitação de Newton em raios elevados, o que sugere a presença de algum outro tipo de matéria ainda não detectada.

Mais recentemente, o experimento do telescópio Chandra [41], que mede os raios-X vindos de aglomerados de galáxias e combina os resultados com dados independentes da radiação cósmica de fundo, e também análises baseadas em estatísticas de lentes gravitacionais [42], obtiveram valores mais precisos para a matéria total do Universo. Descontando o valor da já conhecida matéria bariônica, o valor mais aceito hoje para a densidade da matéria escura é [43]

$$\Omega_{dm}^0 = \frac{\rho_{dm}^0}{\rho_c^0} = 0,23 \pm 0,03. \quad (3.38)$$

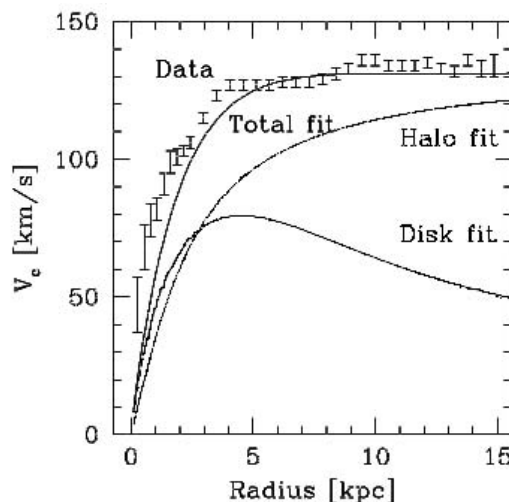


Figura 3.6: Curvas de rotação das galáxias.

Se considerarmos que a matéria escura é não-relativística, sem pressão e não interagente com outros constituintes, sua equação de evolução será igual à usada para matéria bariônica:

$$\rho_{dm} = \frac{\rho_{dm}^0}{a^3} = \rho_{dm}^0 (1+z)^3. \quad (3.39)$$

Em geral é esta a representação utilizada, mas existem modelos (como os que serão tratados no próximo capítulo) que consideram interações entre a matéria escura e um outro componente da densidade total do Universo; isto modificaria a equação acima.

3.2.4 Energia escura

Quando anteriormente tratamos do parâmetro de desaceleração, vimos que dados experimentais baseados em medidas da curva de luminosidade de supernovas do tipo Ia comprovam que hoje o Universo passa por uma fase de expansão acelerada. Isto significa que os constituintes já abordados (bárions, radiação, matéria escura) são incapazes de tornar positiva a aceleração do fator de escala $\ddot{a}(t)$ na equação da aceleração (3.18). É necessário, então, introduzirmos um novo componente na densidade do Universo.

Além disso, a determinação do parâmetro de densidade total do Universo é de grande importância, pois se ele for conhecido podemos determinar a curvatura do

Universo, conforme a equação (3.16). Uma maneira de chegarmos a esta determinação é analisar as flutuações de temperatura presentes na radiação cósmica de fundo, pois a localização dos picos presentes no espectro de temperatura está relacionado com Ω_{tot} . As medições do satélite WMAP [36] estabelecem o limite

$$\Omega_{tot}^0 = 1,02 \pm 0,02. \quad (3.40)$$

Na figura 3.7 vemos a combinação de três experimentos que convergem para um mesmo valor de Ω_{tot}^0 e mostram valores concordantes com a possibilidade de um Universo plano.

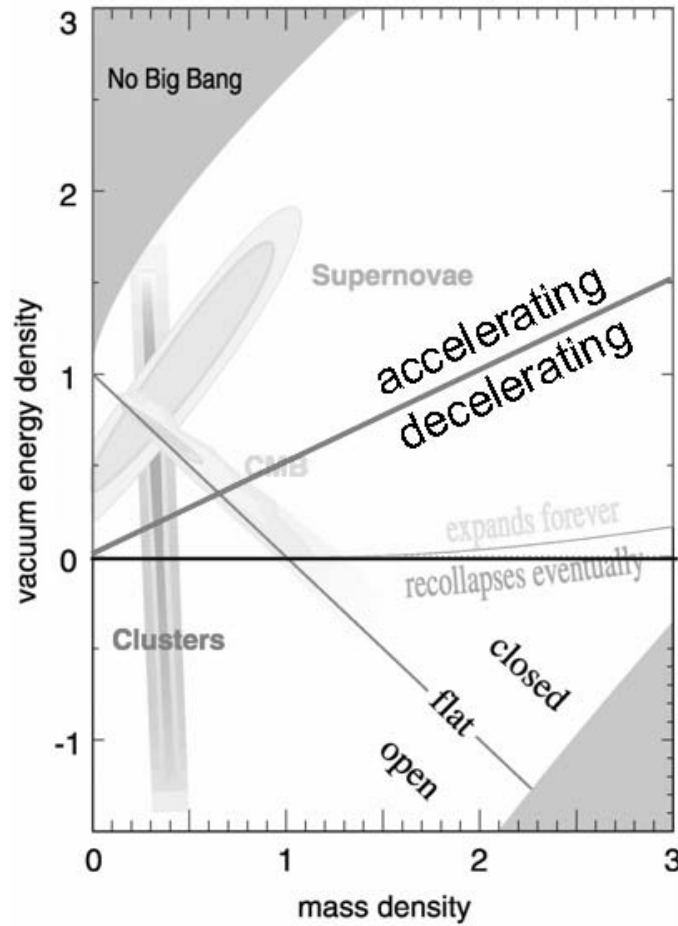


Figura 3.7: Parâmetros de densidade do Universo [41].

Isto significa que, ainda de acordo com (3.16), o Universo parece apresentar curvatura nula ($k = 0$), e desta forma pode ter uma geometria espacialmente plana. Além disso, se somarmos a contribuição dos constituintes já abordados, chegamos a

$\Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_{dm}^0 \simeq 0,28$, o que indica que ainda existe algum componente desconhecido que completaria a soma para atingir Ω_{tot}^0 .

Uma possibilidade é supor que o termo relativo à constante cosmológica (que foi introduzida nas equações de Einstein para que se ganhasse generalidade) é o responsável pela porção de energia faltante. Assim sendo, os experimentos estabelecem o limite para essa componente, conhecida hoje como energia escura [43]:

$$\Omega_\Lambda^0 = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c^0} = 0,72 \pm 0,03. \quad (3.41)$$

É importante ressaltar que, uma vez que ρ_c varia com o tempo, não podemos dizer que Ω_Λ é constante. Na verdade, quem é constante é $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c = \Lambda/8\pi G$. Ainda, a constante cosmológica é apenas uma maneira de tentar explicar a energia escura; é perfeitamente possível que se proponham outras, e para tanto basta impor que $\Lambda = 0$ e então equacionar algum outro constituinte equivalente.

3.3 Modelos

Nesta seção abordaremos os dois principais modelos que se propõem a explicar a evolução do Universo e buscam entrar em concordância com todos os dados experimentais atualmente existentes [32, 33].

3.3.1 Modelo da constante cosmológica

O período inflacionário

O conjunto de equações apresentadas até agora pode descrever relativamente bem o Universo a partir de seus aproximadamente 10^{-34} s, mas o modelo enfrenta alguns problemas graves. Para solucioná-los, Alan Guth propôs em 1981 uma alternativa: houve um período próximo ao início do Universo durante o qual o fator de escala sofreu uma grande aceleração, e esse fato passou a ser denominado inflação. A própria idéia da constante cosmológica pode ser utilizada para descrever a inflação.

Da equação de Friedmann (3.8), consideramos que conforme $a(t)$ sofre grandes acréscimos (e conseqüentemente também o volume do Universo), a curvatura k e a densidade ρ sofrem rápida diluição, com exceção do termo da constante cosmo-

lógica. Por isso, a equação torna-se simplesmente $H^2 = \Lambda/3$ e tem como solução

$$a(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t\right), \quad (3.42)$$

o que mostra que quando o Universo é dominado pela constante cosmológica, fica sujeito a uma taxa de expansão especialmente alta.

Nesse contexto, uma interpretação teórica para a constante cosmológica foi encontrada na teoria quântica de campos, para a qual a densidade de energia ρ_Λ é relacionada à energia de vácuo contida nos modos de vibração dos campos quânticos ($\rho_\Lambda = \rho_{\text{vácuo}}$). Levando em conta que a constante Λ tem dimensão de $[\text{L}]^{-2}$, é natural esperar de uma interpretação quântica que ela esteja relacionada com o comprimento de Planck (L_{pl}). É necessário restituir o fator c para fazer o cálculo da ordem de grandeza de ρ_Λ para o período de inflação:

$$\rho_\Lambda^{\text{vac}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \sim \frac{L_{pl}^{-2} c^2}{8\pi G} = \frac{[(\hbar G/c^3)^{1/2}]^{-2} c^2}{8\pi G} \sim 10^{95} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (3.43)$$

Depois de algum tempo o período inflacionário tem que chegar a um fim, e considera-se a possibilidade de que a energia da constante cosmológica tenha se convertido em matéria convencional.

O modelo Λ CDM

O modelo mais simples e mais aceito atualmente para explicar a evolução do Universo é o chamado modelo Λ CDM (constante cosmológica com matéria escura fria – *cold dark matter*). Este modelo supõe que o Universo possui curvatura espacial plana ($k = 0$ – pelo menos neste trabalho) e é descrito por um fluido formado por quatro constituintes: matéria bariônica, radiação, matéria escura e constante cosmológica. Dessa forma, a densidade e pressão totais são a soma de cada um de seus componentes:

$$\rho_c \simeq \rho = \rho_b + \rho_r + \rho_{dm} + \rho_\Lambda, \quad (3.44)$$

$$p = p_b + p_r + p_{dm} + p_\Lambda = p_r + p_\Lambda = \rho_r/3 - \rho_\Lambda, \quad (3.45)$$

onde no cálculo da pressão fizemos uso de (3.13) e (3.32).

O modelo é descrito por três equações básicas – equação de Friedmann (3.8), equação da aceleração (3.9) e equação do fluido (3.10), sendo que esta última é

também obedecida para cada um dos quatro constituintes independentemente, visto que nenhum deles interage entre si:

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm} = 0,275 (1+z)^3 \frac{\rho_c^0}{\rho}, \quad (3.46)$$

$$\Omega_r = 4,76 \cdot 10^{-5} \frac{g_*(z)}{2} (1+z)^4 \frac{\rho_c^0}{\rho}, \quad (3.47)$$

$$\Omega_\Lambda = 0,72 \frac{\rho_c^0}{\rho}, \quad (3.48)$$

onde juntamos os dois tipos de matéria em uma única equação e substituímos pelos valores tidos como presentes, conforme apresentados na seção 3.2, e a função $g_*(z)$ tem seus valores dados por (3.35). A razão ρ/ρ_c^0 naturalmente é a soma $[0,275 (1+z)^3 + 4,76 \cdot 10^{-5} (1+z)^4 g_*(z)/2 + 0,72]$, e tem como função normalizar o parâmetro de densidade total ($\Omega_{tot} = \rho/\rho_c = 1$). No lado esquerdo da figura 3.8 apresentamos a evolução dos parâmetros de densidade em função do *redshift* de acordo com o modelo Λ CDM. Podemos ver no quadro desta figura que a igualdade radiação-matéria, ou seja, o momento no qual a densidade de energia da radiação encontra a densidade de energia da matéria (bárions e matéria escura), situa-se por volta de $z \simeq 3300$.

O parâmetro de desaceleração q , a partir de sua definição (3.18) e das equações da aceleração e de Friedmann, é dado por:

$$q \equiv -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{H^2} \frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}. \quad (3.49)$$

No lado direito da figura 3.8 mostramos o comportamento de q . Vemos que, para os valores atuais do parâmetros de densidade utilizados aqui, a transição da fase desacelerada para a acelerada dá-se em $z_T \simeq 0,735$.

A diferença entre magnitudes (que é função da distância de luminosidade) em termos do *redshift*, conforme as equações (3.27) e (3.28) e o fato de que $H = HH_0/H_0 = (\rho/\rho_c^0)^{1/2} H_0$ levam a

$$\mu_0 = 25 + 5 \log_{10} \left\{ \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{dz}{[0,275 (1+z)^3 + 4,76 \cdot 10^{-5} (1+z)^4 + 0,72]^{1/2}} \right\}, \quad (3.50)$$

onde a relação entre constantes vale $c/H_0 = (3 \cdot 10^8) / (72 \cdot 10^3) \simeq 4167$ Mpc, e esta unidade deve ser mantida para possibilitar comparação com os dados experimentais. A função $g_*(z)$ foi suprimida de (3.50) porque, conforme (3.35), ela só é importante

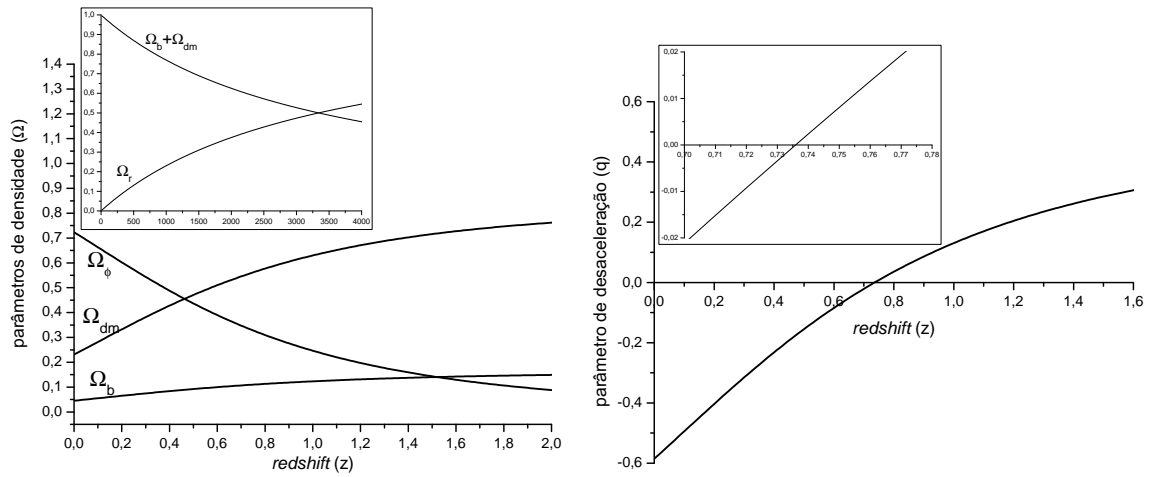


Figura 3.8: Esquerda: Parâmetros de densidade; direita: q vs. *redshift* z .

quando $z \gtrsim 1000$, intervalo sem importância para as medidas da distância de luminosidade. No lado esquerdo da figura 3.9 podemos observar de que maneira as previsões do modelo Λ CDM se comportam em relação aos pontos experimentais medidos das supernovas.

Além disso, no lado direito da figura 3.9 vemos a excelente concordância deste modelo com as medidas das anisotropias da radiação cósmica de fundo.

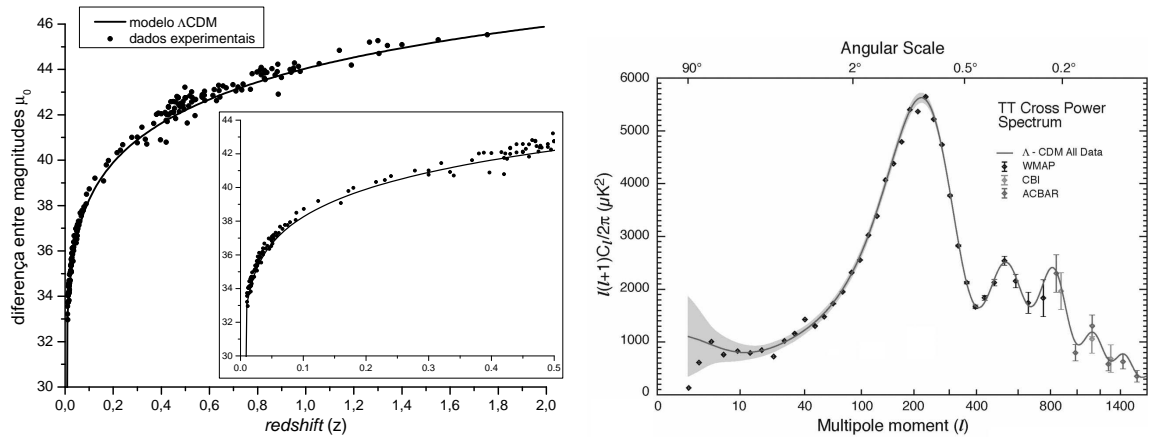


Figura 3.9: Esquerda: distância de luminosidade vs. *redshift* z ; direita: anisotropias da radiação cósmica de fundo.

Os problemas da constante cosmológica

Embora concorde extraordinariamente bem com os dados experimentais, o modelo Λ CDM apresenta alguns importantes problemas.

O primeiro deles está relacionado com o próprio valor da constante cosmológica. Vimos da teoria inflacionária que nas primeiras frações de vida do Universo devemos ter que $\rho_{\Lambda}^{vac} \sim 10^{95} \text{ kg/m}^3$, conforme (3.43). Para encontrar o valor atual dessa densidade de energia, basta combinar as equações (3.15) e (3.41) para chegarmos a $\rho_{\Lambda}^0 \simeq 0,72\rho_c^0$, e com o auxílio de (3.14) concluímos que

$$\rho_{\Lambda}^0 \sim 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad (3.51)$$

o que nos leva a

$$\frac{\rho_{\Lambda}^{vac}}{\rho_{\Lambda}^0} \sim 10^{121}, \quad (3.52)$$

e como a constante cosmológica é função apenas de sua própria densidade de energia e algumas outras constantes ($\Lambda = 8\pi G\rho_{\Lambda}/c^2$), concluímos que a comparação entre seu valor medido hoje e o valor esperado na época da inflação difere em mais de 120 ordens de grandeza, o que caracteriza um grave problema.

Outra dificuldade conhecida do modelo Λ CDM é o chamado problema da coincidência. As densidades de energia da matéria, radiação e constante cosmológica evoluem cada uma de maneira diferente em relação ao fator de escala. A transição de um Universo dominado pela matéria para um dominado pela constante cosmológica toma lugar em um *redshift* em torno de $z \sim 0,5$, relativamente pequeno em relação ao tempo total de vida do Universo. Portanto, seria pouco provável que estivéssemos fazendo essas observações justamente nas proximidades desse momento de transição, no qual os parâmetros de densidade da matéria e energia escura apresentam a mesma ordem de grandeza, sendo que estiveram sempre tão distantes um do outro.

3.3.2 Campo escalar como energia escura

Outro modelo estudado intensivamente e de grande importância para a Cosmologia é aquele que trata a energia escura como um campo escalar, o qual pode ser chamado de *quintessência*.

Um campo escalar é uma função contínua do espaço tempo $\phi(x^\mu)$ que descreve uma partícula de spin nulo. Por se tratar de uma função contínua, é conveniente

trabalhar com uma densidade de lagrangiana \mathcal{L} , sendo que a lagrangiana L é dada por [44]:

$$L = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x, \quad (3.53)$$

onde $\partial_\mu \phi = \partial \phi / \partial x^\mu$. A ação do sistema é então

$$S = \int L dt = \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x. \quad (3.54)$$

Variando a ação, obtemos as equações de Euler-Lagrange para \mathcal{L} :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (3.55)$$

A forma da densidade de lagrangiana para um campo escalar com massa nula é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.56)$$

onde $V(\phi)$ é a densidade de potencial. Aplicando (3.55) em (3.56), obtemos a equação de movimento do campo escalar, chamada de equação de Klein-Gordon:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \square \phi = -\frac{dV}{d\phi}, \quad (3.57)$$

na qual \square representa o operador d'Alembertiano. Supondo que o campo é aproximadamente homogêneo [$\phi \approx \phi(t)$], podemos calcular a equação de Klein-Gordon para um campo escalar na métrica de Robertson-Walker:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.58)$$

Aplicando o teorema de Noether, que diz que em um sistema cuja lagrangiana não depende das coordenadas x^μ existe uma corrente conservada associada a uma translação no espaço-tempo, encontramos a quantidade conservada

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.59)$$

Usando agora (3.56), é possível reescrever (3.59), que se comporta como um tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (3.60)$$

Utilizando o tensor métrico da métrica de Robertson-Walker (2.135) e a expressão das componentes do tensor energia-momento (2.150), podemos encontrar

a densidade de energia e a pressão de um campo escalar homogêneo com potencial $V(\phi)$:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad \text{e} \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.61)$$

E como sabemos que $T_{\mu\nu}^\phi$ é uma quantidade conservada ($\nabla_\nu T_\phi^{\mu\nu} = 0$), podemos encontrar uma equação do fluido para o campo escalar:

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0. \quad (3.62)$$

Dessa forma, nas proximidades dos tempos atuais a componente do campo escalar tem pressão negativa (pois $\dot{\phi}(t_0) \ll V(\phi_0)$) e conforme voltamos para trás no tempo o potencial deve ir diminuindo para que a matéria e a radiação possam ultrapassar a energia escura e dominar a densidade do Universo. A equação de estado do campo escalar ($p_\phi = \omega_\phi \rho_\phi$) não é mais obrigatoriamente $\omega_\phi = -1$, como acontecia no caso da constante cosmológica, e pode variar na faixa $-1 \leq \omega_\phi \leq 1$:

$$\omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.63)$$

Em relação ao potencial $V(\phi)$, temos na literatura a utilização de uma vasta gama de modelos diferentes (veja, por exemplo, [45]), sendo que um dos mais comuns é o chamado potencial exponencial

$$V(\phi) = V_0 \exp[-\alpha\phi(t)], \quad (3.64)$$

com V_0 e α sendo constantes arbitrárias.

Entretanto, a energia escura definida na forma de um campo escalar continua sendo uma solução problemática, que não apenas depende de uma função arbitrária $V(\phi)$ mas também precisa ser cuidadosamente ajustada, de uma maneira semelhante à constante cosmológica.

3.3.3 Outros modelos

Além desses dois modelos mencionados, existem inúmeros outros que são estudados intensamente pela comunidade científica. Podemos mencionar por exemplo aqueles que envolvem "campos fantasmas", Cosmologia Quântica, Cosmologia de Branas, gás de Chaplygin, etc. Neste trabalho desenvolvemos modelos que utilizam campos escalares não-minimamente acoplados à curvatura escalar, e nos quais a

matéria escura interage diretamente com a energia escura. Separadamente estes acoplamentos produzem resultados já conhecidos; vamos estudar no próximo capítulo o efeito combinado de ambos atuando simultaneamente.

Capítulo 4

Modelos com interação

Neste capítulo apresentamos a parte que envolve nossas contribuições originais. Estudamos aqui um modelo de quintessência modificado em relação ao apresentado no capítulo anterior, no qual o campo escalar deixa de ser minimamente acoplado à curvatura espacial. Dessa forma, a lagrangiana passa a conter também um termo que inclui o produto do escalar de curvatura R pelo campo ϕ , juntamente com uma constante que regula a intensidade desse acoplamento. O que fazemos é quantificar as consequências da inclusão desse novo termo.

Além disso, levamos em conta outra modificação no modelo usual do campo escalar. No caso mais simples, desconsidera-se qualquer acoplamento entre a matéria escura e a energia escura, embora não existam evidências que justifiquem definitivamente esta hipótese. Por isso, consideramos aqui que a matéria e a energia escura podem transferir energia entre si. Para tal fim, levamos em conta dois mecanismos distintos: primeiramente, consideramos que a massa das partículas da matéria escura pode variar com o tempo, e essa variação se dá de acordo com a evolução do campo escalar da energia escura (acoplamento de Anderson e Carroll); em uma segunda etapa consideramos uma interação direta, na qual um termo de acoplamento é inserido diretamente nas equações do fluido dos constituintes do setor escuro (acoplamento de Wetterich).

Neste capítulo as unidades foram escolhidas de tal forma que $8\pi G = c = \hbar = k = 1$, e o tensor métrico continua tendo assinatura $(+, -, -, -)$. As soluções das equações diferenciais deduzidas dos diferentes modelos foram obtidas numericamente por meio da ferramenta *Mathematica 5.2*.

4.1 Acoplamento de Anderson e Carroll

4.1.1 Equações de campo

Vamos considerar nesta seção que o Universo é modelado como uma mistura de um campo escalar que faz o papel de energia escura, um campo de matéria escura, e bárions e radiação não interagentes. Aqui adotamos um campo escalar não-minimamente acoplado à curvatura [9], e um campo de matéria escura cuja massa é proporcional ao valor do campo escalar em cada ponto [20]. A ação para este modelo pode ser escrita como:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2}(1 - \xi\phi^2)R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}\zeta^2\phi^2\chi^2 + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_b \right\}, \quad (4.1)$$

onde ϕ e χ são os campos escalares da energia escura e matéria escura, respectivamente, $V = V(\phi)$ é a densidade de potencial da energia escura, ξ é a constante de acoplamento entre a energia escura e a curvatura escalar R e $\zeta\phi$ é a massa da partícula de matéria escura, com ζ constante. Além disso, \mathcal{L}_r e \mathcal{L}_b representam as densidades de lagrangiana da radiação e dos bárions, respectivamente. Podemos também definir a lagrangiana da matéria escura a partir de (4.1):

$$\mathcal{L}_{dm} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}\zeta^2\phi^2\chi^2. \quad (4.2)$$

Para obter as equações de campo de Einstein e a expressão do tensor energia-momento dos constituintes, devemos variar a ação (4.1) com relação ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, de tal forma que tenhamos

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (4.3)$$

Efetuamos o cálculo da variação inicialmente para a matéria bariônica, radiação e matéria escura:

$$\delta(S_b + S_r + S_{dm}) = \frac{1}{2} \int (T_{\mu\nu}^b + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^{dm}) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (4.4)$$

considerando que o tensor energia-momento total $T_{\mu\nu}$ das fontes do campo gravitacional é a soma dos tensores energia-momento dos bárions $T_{\mu\nu}^b$, da radiação $T_{\mu\nu}^r$, da matéria escura $T_{\mu\nu}^{dm}$ e do campo escalar $T_{\mu\nu}^\phi$, ou seja, $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^b + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^{dm} + T_{\mu\nu}^\phi$. Para a matéria bariônica e radiação, a expressão do tensor energia-momento segue de (2.126), e no caso da matéria escura basta utilizarmos (4.2) e a relação (2.116),

de tal forma que temos

$$T_{\mu\nu}^b = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_b}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T_{\mu\nu}^r = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_r}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.5)$$

$$T_{\mu\nu}^{dm} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_{dm}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{dm}}{\delta g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_{dm} g_{\mu\nu} = \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \chi \partial^\sigma \chi - \frac{1}{2} \zeta^2 \phi^2 \chi^2 \right) g_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Vamos calcular agora a variação da parte da ação relativa ao campo gravitacional e ao campo escalar não-minimamente acoplado:

$$\begin{aligned} \delta(S_g + S_\phi) &= \frac{1}{2} \int \delta \{ \sqrt{-g} [(1 - \xi \phi^2) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\mu \phi - 2V] \} d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \xi \phi^2) [R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu})] + \\ &\quad + \delta \{ \sqrt{-g} [\partial_\mu \partial^\mu \phi - 2V] \} d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \left\{ (1 - \xi \phi^2) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} - \xi \phi^2 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \right. \\ &\quad \left. \stackrel{=0 \text{ por (2.123)}}{\overbrace{g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}}} + \left[\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + g^{\mu\nu} V \right] \delta g^{\mu\nu} \right\} d^4x. \end{aligned} \quad (4.7)$$

O termo ainda não desenvolvido, $\xi \phi^2 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$, pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \xi \phi^2 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \xi \phi^2 \{ \nabla_\mu [\nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) - g_{\alpha\beta} \nabla^\mu (\delta g^{\alpha\beta})] \} \\ &= \overbrace{\xi \nabla_\mu \{ \phi^2 [\nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) - g_{\alpha\beta} \nabla^\mu (\delta g^{\alpha\beta})] \}}^{=0} - \\ &\quad - \xi [\nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}) - g_{\alpha\beta} \nabla^\mu (\delta g^{\alpha\beta})] (\nabla_\mu \phi^2) \\ &= \overbrace{-\xi \{ \nabla_\nu [\delta g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi^2)] - g_{\alpha\beta} \nabla^\mu [\delta g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \phi^2)] \}}^{=0} + \\ &\quad + \xi \{ \nabla_\nu \nabla_\mu \phi^2 \delta g^{\mu\nu} - g_{\alpha\beta} \nabla^\mu \nabla_\mu \phi^2 \delta g^{\alpha\beta} \} \\ &= \xi \{ \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2 - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma \phi^2 \} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A porção do tensor energia-momento que faltava obter diz respeito ao campo escalar não minimamente acoplado, e de (4.7) e (4.8) pode ser encontrada como sendo

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - V \right) g_{\mu\nu} - \xi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2 - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma \phi^2). \quad (4.9)$$

Podemos finalmente separar as variações da ação nas contribuições ao campo gravitacional e às fontes de matéria. A parte relativa ao campo gravitacional fica

$$\delta S_g = \frac{1}{2} \int (1 - \xi \phi^2) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.10)$$

Comparando com (2.124), podemos chegar às equações de Einstein para este caso:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{T_{\mu\nu}}{(1 - \xi\phi^2)}. \quad (4.11)$$

Chamamos a atenção para o fato de que, devido a inclusão do acoplamento entre o campo escalar e o escalar de curvatura, o divergente covariante do tensor energia-momento total não se anula. Por meio das identidades de Bianchi (2.106), podemos obter de (4.11) que

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 2\xi\phi \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \right) \partial_\nu\phi, \quad (4.12)$$

indicando que o tensor energia-momento total não é uma quantidade conservada (na seção 4.3 escrevemos o tensor energia-momento de maneira a torná-lo conservado). Entretanto, assumimos que o divergente covariante dos tensores energia-momento dos bárions e da radiação se anulam, ou seja, $\nabla_\nu T_b^{\mu\nu} = 0$ e $\nabla_\nu T_r^{\mu\nu} = 0$, uma vez que eles são considerados como campos não-interagentes desde a época do desacoplamento até o tempo presente.

As equações de evolução para os campos escalar e de matéria escura são obtidas das equações de Euler-Lagrange (3.55), fornecendo

$$\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi + \frac{dV}{d\phi} + \xi R\phi + \zeta^2 \phi \chi^2 = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_\sigma \nabla^\sigma \chi + \zeta^2 \phi^2 \chi = 0. \quad (4.13)$$

Além disso, restringimos nosso estudo às consequências do modelo apresentado para um Universo que é isotrópico, homogêneo e espacialmente plano, descrito pela métrica de Robertson-Walker conforme vimos na subseção 2.3.1:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.14)$$

onde $a(t)$ representa o fator de escala. Para um Universo homogêneo e isotrópico, a representação mais geral para o tensor energia-momento total em um sistema de coordenadas comóveis é dada, conforme (2.150), por $T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, onde a densidade de energia total ρ e a pressão total p da mistura são apresentadas aqui em termos das respectivas quantidades de seus constituintes, ou seja, $\rho = \rho_b + \rho_r + \rho_{dm} + \rho_\phi$ e $p = p_b + p_r + p_{dm} + p_\phi$. Continuaremos assumindo que os bárions são não-relativísticos, de maneira que $p_b = 0$ e que a equação barotrópica de estado para o campo de radiação $p_r = \rho_r/3$ permanece válida. Agora, para a métrica de Robertson-Walker, as equações de campo de Einstein (4.11) levam à seguinte forma modificada da equação de Friedmann, obtida a partir da componente temporal de

$T_{\mu\nu}$, conforme (2.150) e em processo análogo ao que levou a (2.152):

$$H^2 = \frac{\rho}{3(1 - \xi\phi^2)}. \quad (4.15)$$

A partir das componentes espaciais de $T_{\mu\nu}$, seguindo os mesmos passos que culminaram em (2.154), obtemos a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3p}{6(1 - \xi\phi^2)}, \quad (4.16)$$

devido ao acoplamento não mínimo entre o campo escalar e o campo gravitacional, e lembramos que o termo $H = \dot{a}(t)/a(t)$ representa o parâmetro de Hubble.

A densidade de energia e a pressão da matéria escura podem agora ser determinadas a partir de (4.6), tomando-se respectivamente as componentes temporal e espacial do tensor energia-momento (2.150), o que resulta em

$$\rho_{dm} = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}\zeta^2\chi^2\phi^2 \quad \text{e} \quad p_{dm} = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - \frac{1}{2}\zeta^2\chi^2\phi^2. \quad (4.17)$$

Para encontrar a densidade de energia escura, utilizamos inicialmente dois desenvolvimentos:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2 = \nabla_\mu (\partial_\nu \phi^2) = \partial_\mu \partial_\nu \phi^2 - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \partial_\sigma \phi^2, \quad (4.18)$$

$$\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi^2 = \nabla_\sigma (\partial^\sigma \phi^2) = \partial_\sigma \partial^\sigma \phi^2 + \Gamma^\sigma_{\sigma\gamma} \partial^\gamma \phi, \quad (4.19)$$

que levam, a partir de (4.9) e novamente (2.150), a

$$T_{tt}^\phi = \partial_t \phi \partial_t \phi - \left(\frac{1}{2} \partial_t \phi \partial^t \phi - V \right) g_{tt} - \xi \left[\partial_t \partial_t \phi^2 - \Gamma_{tt}^t \partial_t \phi^2 - (\partial_t \partial^t \phi^2 + \Gamma_{\sigma t}^\sigma \partial^t \phi) g_{tt} \right]. \quad (4.20)$$

Usando (2.138) e o fato de que $\Gamma_{00}^0 = 0$, chegamos finalmente à densidade de energia do campo escalar:

$$\rho_\phi = T_{tt}^\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + 6\xi H\phi\dot{\phi}. \quad (4.21)$$

Realizando procedimento análogo, encontramos a pressão relacionada ao campo escalar:

$$p_\phi = -T_{ii}^\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V - 2\xi \left(\phi\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2 + 2H\phi\dot{\phi} \right). \quad (4.22)$$

A hipótese de homogeneidade implica que os campos ϕ e χ têm que ser função apenas do tempo, de maneira que as equações de evolução para a energia escura (4.13)₁ e matéria escura (4.13)₂, com o auxílio das relações (4.18) e (4.19), reduzem-se respectivamente a

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + \frac{\xi\phi}{1 - \xi\phi^2} (\rho - 3p) + \frac{1}{\phi} (\rho_{dm} - p_{dm}) = 0, \quad (4.23)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \zeta^2\phi^2\chi = 0. \quad (4.24)$$

A equação de evolução para a densidade de energia do campo escalar é obtida ao tomarmos a derivada temporal de sua densidade de energia (4.21), a qual, após algumas manipulações, resulta em

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -(\rho_{dm} - p_{dm})\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{2\xi\phi\dot{\phi}\rho}{1 - \xi\phi^2}, \quad (4.25)$$

devido a (4.22) e (4.23). Seguindo a mesma metodologia, a derivada temporal da densidade de energia da matéria escura (4.17)₁ leva à equação que dá a evolução da densidade de matéria escura:

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H(\rho_{dm} + p_{dm}) = (\rho_{dm} - p_{dm})\frac{\dot{\phi}}{\phi}, \quad (4.26)$$

com o uso das equações (4.17)₂ e (4.24). A partir de (4.25) e (4.26) inferimos que existe uma transferência de energia do campo escalar para o campo de matéria escura dada pelo termo $(\rho_{dm} - p_{dm})\dot{\phi}/\phi$. Além disso, o termo $2\xi\phi\dot{\phi}\rho/(1 - \xi\phi^2)$ em (4.25) é o responsável pela transferência de energia do campo escalar para o campo gravitacional. A conservação do tensor energia-momento dos bárions e da radiação leva às já conhecidas relações $\rho_b \propto 1/a^3$ e $\rho_r \propto 1/a^4$. Nas próximas subseções encontraremos as soluções cosmológicas para este modelo considerando dois casos: matéria escura sem pressão e um campo de matéria escura com pressão não nula.

4.1.2 Matéria escura sem pressão

Para o caso de matéria escura sem pressão ($p_{dm} = 0$), segue da equação (4.26) que $\rho_{dm} \propto \phi/a^3$. Além disso, esta última relação implica no fato de que a densidade do número de partículas de matéria escura é conservada, ou $\dot{n}_{dm} + 3Hn_{dm} = 0$. Aqui temos apenas uma equação a resolver – a equação de evolução do campo escalar (4.23) – para obtermos a evolução temporal do campo de aceleração e das densidades de energia de cada componente. Fazendo uma mudança de variáveis, podemos expressar a equação do campo escalar da energia escura (4.23) em termos do *redshift* z , uma vez que, conforme vimos em (3.6), $a = 1/(1+z)$ e $a(0) = 1$. Então, temos que

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{dz}{da} \frac{d}{dz} = -H(1+z) \frac{d}{dz}, \quad (4.27)$$

o que torna possível escrever (4.23) como

$$\frac{(1+z)^2\rho}{3(1-\xi\phi^2)}\phi'' - \frac{(1+z)(\rho-3p)}{6(1-\xi\phi^2)}\phi' + \frac{dV}{d\phi} + \frac{\xi\phi(\rho-3p)}{1-\xi\phi^2} + \frac{\rho_{dm}}{\phi} = 0, \quad (4.28)$$

onde a partir de agora o apóstrofo representa a derivada em relação a z . Para solucionar (4.28) temos que escolher uma forma para a densidade de potencial. Dentre os vários modelos existentes [45], selecionamos um potencial que também foi utilizado nos trabalhos [19, 20, 46]:

$$V(\phi) = \frac{K}{\phi^\alpha}, \quad (4.29)$$

onde K é uma constante. Esta forma tem a propriedade de crescer para pequenos valores de ϕ , evitando que o campo – e conseqüentemente a densidade de energia da matéria escura – torne-se negativo. Além disso, temos que especificar as condições iniciais para o campo escalar e sua derivada, bem como para a densidade de energia dos bárions, da radiação e da matéria escura. As condições iniciais para as densidades de energia foram escolhidas a partir dos valores atuais apresentados na seção 3.2 (veja [43] para uma revisão) para os parâmetros de densidade $\Omega_i(z) = \rho_i(z)/\rho(z)$, isto é, $\Omega_b(0) = 0,045$, $\Omega_r(0) = 4,76 \cdot 10^{-5} g_*(z)/2$ e $\Omega_{dm}(0) = 0,23$, com $g_*(z)$ dado por (3.35). A constante K foi determinada a partir do valor atual do parâmetro de densidade da energia escura, $\Omega_\phi(0) = 0,72$, uma vez que consideramos que o valor presente do campo escalar é pequeno e por isso $\rho_\phi(0) \approx V$. Ainda restam α e ξ como parâmetros livres, cuja influência será estudada mais tarde nesta seção.

A figura 4.1 mostra um retrato de fase que exhibe a evolução de um conjunto de condições iniciais. Variando os valores do campo escalar para produzir pequenas variações no valor inicial da densidade de energia escura, observamos que algumas soluções evoluem em um comportamento não-físico, uma vez que levam a valores negativos de ρ_ϕ , ao mesmo tempo que existe um outro conjunto de soluções que faz com que a densidade de energia escura aumente muito rapidamente e seja responsável por quase toda a contribuição aos termos H e ρ . Para que possamos chegar a um comportamento fisicamente aceitável, é necessário impor que o campo escalar possua valores pequenos e positivos em épocas remotas, isto é, $z \gtrsim 1000$. Fisicamente, isto significa que o campo escalar começa a rolar mais significativamente por volta daquela época e então evolui até hoje. Além disso, uma derivada negativa do campo escalar em *redshifts* altos implicaria numa densidade de energia escura negativa devido a (4.21).

A evolução dos parâmetros de densidade em função do *redshift* é mostrada no lado esquerdo da figura 4.2. Consideramos um valor fixo para a constante α , de $\alpha = 1/3$, e diferentes valores para a constante de acoplamento ξ . Dois casos diferentes foram analisados: (a) um campo escalar variando lentamente, no qual seu valor não muda significativamente com o *redshift*, indicando que as diferenças

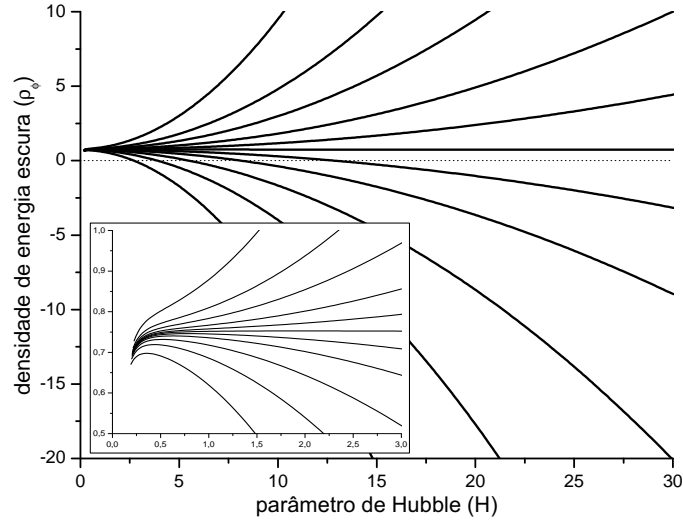


Figura 4.1: Retrato de fase típico (ρ_ϕ, H) correspondente ao caso $\alpha = 1/3$ e $\xi = -0,2$, exibindo a evolução de soluções físicas e não-físicas.

do modelo usual da quintessência ($\xi = 0$) são basicamente devidas à influência do acoplamento não-mínimo ($\xi = -0,2$); (b) um campo escalar variando rapidamente, caracterizado por $\xi = -0,3$, que possui um valor inicial menor que no primeiro caso mas sofre uma mudança mais acentuada conforme o *redshift* aumenta. Inferimos desta figura que, aumentando o *redshift*, o parâmetro de densidade da energia escura decai mais lentamente para o caso do campo variando mais rapidamente ($\xi = -0,3$), seguido pelo caso da variação mais lenta quando $\xi = -0,2$ e $\xi = 0$, enquanto o parâmetro de densidade de matéria escura cresce mais lentamente quanto mais fraco for o acoplamento. Isso pode ser explicado se notarmos que o último termo do lado direito de (4.25) – que depende da constante de acoplamento ξ – reduz a transferência de energia do campo escalar para o campo de matéria escura. Para $\xi = 0$, a igualdade entre matéria escura e energia escura ocorre quando $z \approx 0,4$ e a igualdade entre energia escura e bárions quando $z \approx 1,4$, enquanto para $\xi = -0,2$ e $\xi = -0,3$ elas acontecem em *redshifts* maiores. Além disso, para $\xi = 0$ a igualdade radiação-matéria (bárions e matéria escura) ocorre em $z \approx 3700$, enquanto para $\xi = -0,2$ e $\xi = -0,3$ esta igualdade ocorre para valores de *redshift* menores e maiores, respectivamente.

O parâmetro de desaceleração definido em (3.18), $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$, é mostrado no lado direito da figura 4.2 em função do *redshift* z . Notamos que, ao aumentar a constante de acoplamento, a transição de uma fase desacelerada para uma fase acelerada ocorre em *redshifts* menores. De acordo com os atuais valores experimen-

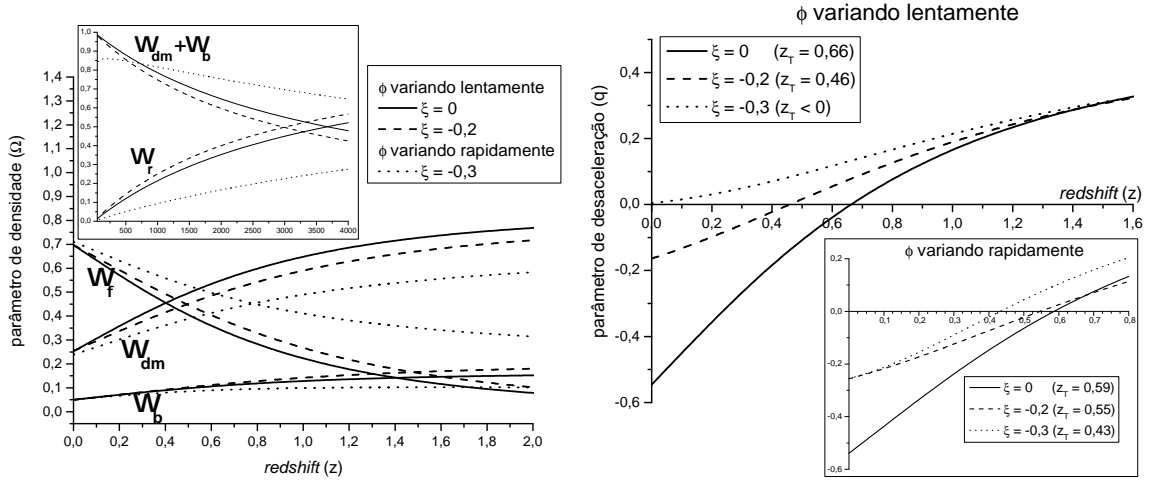


Figura 4.2: Esquerda: evolução dos parâmetros de densidade Ω_i vs. *redshift* z ; direita: parâmetro de desaceleração q vs. *redshift* z .

tais [5] essa transição ocorre em $z_T = 0,46 \pm 0,13$, e podemos observar da figura 4.2 que para o caso do campo escalar variando mais lentamente com $\xi = -0,2$ ela acontece em $z_T = 0,46$, enquanto no caso da variação mais rápida com $\xi = -0,3$ em $z_T = 0,43$. Entretanto, em ambos os casos o valor presente do parâmetro de desaceleração tem um módulo menor que o apresentado na literatura para o modelo Λ CDM, de $q_0 \approx -0,6$ conforme vimos na subseção 3.3.1. Se alterarmos o valor do expoente do potencial dentro da faixa $0 \leq \alpha \leq 5$, não é possível observar diferenças significativas no comportamento das curvas da figura 4.2; porém, para valores maiores ($\alpha \approx 10$), há um decaimento mais lento da densidade de energia escura e uma transição mais tardia para a fase desacelerada. Isso acontece porque o potencial $V(\phi)$ é da mesma ordem de grandeza que os outros termos para *redshifts* até $z \approx 4$, e nesta faixa o potencial é principalmente controlado pelo valor de K para uma variação mais lenta de ϕ .

Na figura 4.3 mostramos a diferença μ_0 entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M de uma fonte, dada pelas equações (3.27) e (3.28),

$$\mu_0 = m - M = 5 \log d_L + 25, \quad \text{com} \quad d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \quad (4.30)$$

em função do *redshift* z , onde d_L é a distância de luminosidade dada em Mpc. Nesta figura os círculos representam os valores experimentais oriundos do trabalho [5] para 185 pontos obtidos a partir de supernovas do tipo Ia. Dela inferimos que todos os casos se encaixam bem para *redshifts* baixos, mas conforme voltamos para o pas-

sado, as soluções acopladas começam a distanciar-se da desacoplada (neste caso para baixo, ou diferenças μ_0 menores), afastando-se um pouco da maioria dos pontos experimentais. Se mantivéssemos o campo ϕ variando lentamente e aumentássemos a constante de acoplamento de forma a tornar $\xi = -0,3$, a curva afastar-se-ia ainda mais do modelo padrão. Porém, quando fazemos com que ϕ varie mais rapidamente, conseguimos um efeito semelhante ao do acoplamento com $\xi = -0,2$ para ϕ variando lentamente, o que indica que variações mais fortes do campo escalar possibilitam a utilização de acoplamentos mais intensos entre a energia escura e a curvatura escalar.

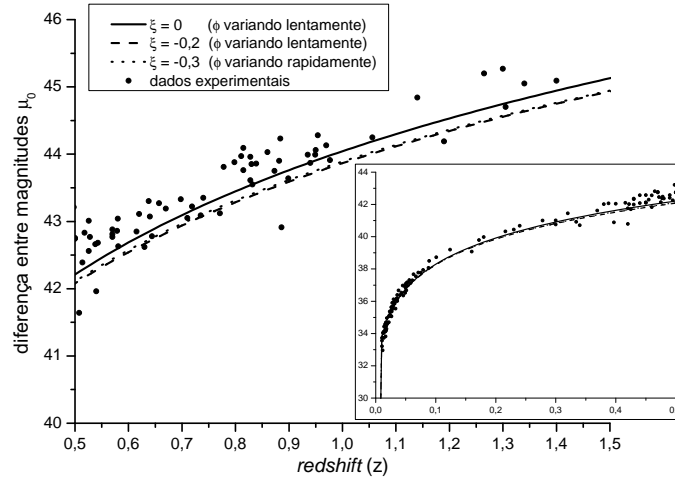


Figura 4.3: Diferença μ_0 vs. *redshift* z .

Para resumir, as melhores soluções são aquelas que permitem que o campo escalar varie somente até que o parâmetro de densidade de energia escura torne-se pequeno e a derivada do campo tenda para uma quantidade pequena e positiva.

4.1.3 Matéria escura com pressão não-nula

Vamos analisar o caso em que o modelo utilizado para a matéria escura tem uma pressão diferente de zero. Para esta finalidade lembramos que, na existência de criação de matéria, a primeira lei da termodinâmica para sistemas adiabáticos ($dQ = 0$) abertos pode ser escrita como [24]

$$dQ = d(\rho V) + p dV - \frac{\rho_{dm} + p_{dm}}{n_{dm}} d(n_{dm} V) = 0, \quad (4.31)$$

onde V representa o volume e supomos que apenas a criação de matéria escura é permitida. Considerando que $V \propto a^3$ e utilizando as leis de conservação para os

bárions e a radiação, vêm de (4.31) que

$$\dot{\rho}_\phi + \dot{\rho}_{dm} + 3H(\rho_\phi + \rho_{dm} + p_\phi + p_{dm}) - \frac{\rho_{dm} + p_{dm}}{n_{dm}}(\dot{n}_{dm} + 3Hn_{dm}) = 0. \quad (4.32)$$

Se compararmos a equação acima com a soma das equações (4.25) e (4.26), obtemos

$$\frac{2\xi\phi\dot{\phi}\rho}{1 - \xi\phi^2} = -\frac{\rho_{dm} + p_{dm}}{n_{dm}}(\dot{n}_{dm} + 3Hn_{dm}). \quad (4.33)$$

Agora, usando novamente (4.26) e $\rho_{dm} = m_{dm}n_{dm} = \zeta\phi n_{dm}$, chegamos à seguinte expressão para a pressão da matéria escura:

$$\frac{p_{dm}}{\rho_{dm}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\xi\phi\dot{\phi}\rho}{(1 - \xi\phi^2)(3H + \dot{\phi}/\phi)\rho_{dm}}}. \quad (4.34)$$

Chamamos a atenção para o fato de que apenas o sinal positivo pode ser escolhido na equação acima para obtermos uma pressão de matéria escura positiva. Além disso, observamos que neste caso quando $\xi = 0$ temos da equação (4.33) que a densidade do número de partículas da matéria escura é conservada, ou seja, $\dot{n}_{dm} + 3Hn_{dm} = 0$, e de (4.34) que a pressão da matéria escura se anula. Para o caso analisado na seção anterior, não há restrições para os valores de ξ quando assumimos desde o início que a pressão de matéria escura se anula; aqui precisamos escolher valores que não tornem negativo o argumento da raiz quadrada. Temos agora para resolver um sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\frac{(1+z)^2\rho}{3(1-\xi\phi^2)}\phi'' - \frac{(1+z)(\rho-3p)}{6(1-\xi\phi^2)}\phi' + \frac{dV}{d\phi} + \frac{\xi\phi(\rho-3p)}{1-\xi\phi^2} + \frac{\rho_{dm}-p_{dm}}{\phi} = 0, \quad (4.35)$$

$$\rho'_{dm} - \frac{3(\rho_{dm} + p_{dm})}{(1+z)} = (\rho_{dm} - p_{dm}) \frac{\phi'}{\phi}, \quad (4.36)$$

onde p_{dm} é dado por (4.34) com o sinal positivo. As condições iniciais usadas aqui são as mesmas que as da subseção anterior.

A figura 4.4 corresponde à figura 4.2 para o caso em que a pressão da matéria escura não se anula, para a qual analisamos duas situações ($\xi = \pm 0,05$) e as comparamos com o caso minimamente acoplado de pressão nula. Observamos do lado esquerdo da figura que o decaimento do parâmetro de densidade do campo escalar para a constante de acoplamento negativa é mais lento se comparado com a situação da pressão nula, enquanto que para uma constante de acoplamento positiva o decaimento é mais acentuado. Isto também pode ser compreendido ao analisarmos o termo $-2\xi\phi\dot{\phi}\rho/(1-\xi\phi^2)$ no lado direito da equação de evolução da densidade de

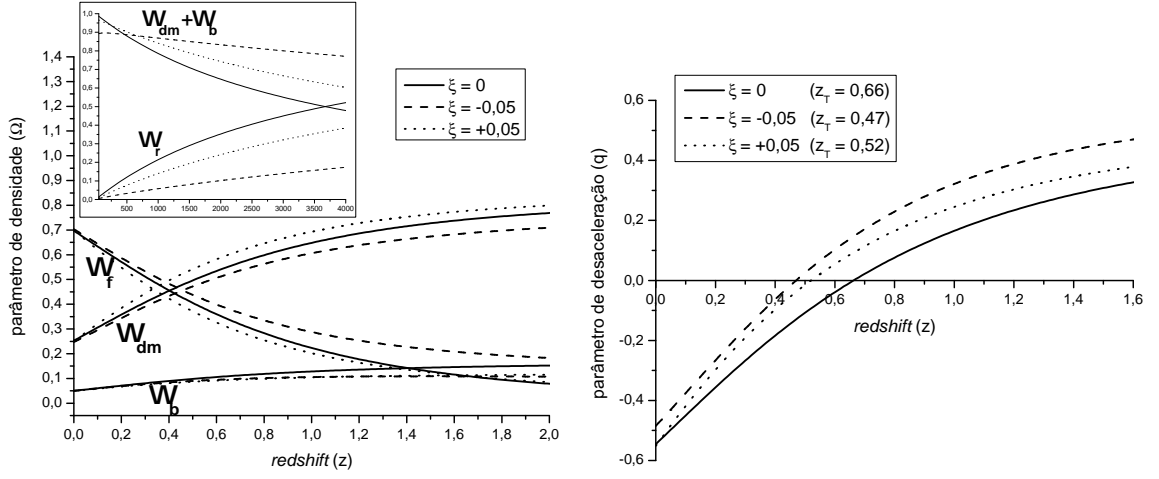


Figura 4.4: Esquerda: evolução dos parâmetros de densidade Ω_i vs. *redshift* z ; direita: parâmetro de desaceleração q vs. *redshift* z .

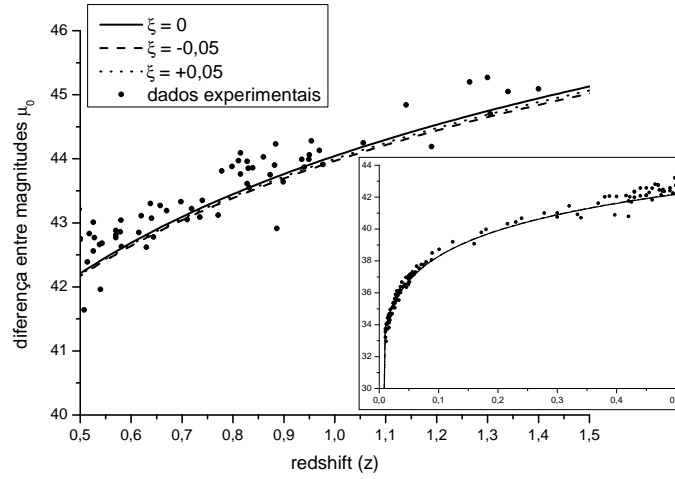


Figura 4.5: Diferença μ_0 vs. *redshift* z .

energia do campo escalar (4.25), uma vez que ele muda de sinal quando ξ é positivo ou negativo, e é igual a zero para o caso sem pressão. Entretanto, para ambos os casos a igualdade radiação-matéria (bárions e matéria escura) ocorre para *redshifts* maiores que os do caso sem pressão. A partir do lado direito da figura 4.4 inferimos que a transição de uma fase desacelerada para uma acelerada para $\xi = -0,05$ ocorre em $z_T = 0,47$ e o atual parâmetro de desaceleração para esse caso aproxima-se do valor $q_0 \approx -0,55$.

Na figura 4.5 mostramos a diferença entre a magnitude aparente e a magnitude absoluta de uma fonte em função do *redshift* para o caso de pressão de matéria escura não-nula. Observamos que, da mesma maneira que no caso da pressão de matéria escura nula, há um desvio das curvas para baixo em relação ao modelo padrão, mas agora esse desvio mostra-se muito menos pronunciado. Ou seja, a pressão atua aqui aumentando a diferença μ_0 entre as fontes.

Finalmente, o lado esquerdo da figura 4.6 mostra a evolução da pressão da matéria escura para as situações discutidas acima. Notamos que para $\xi = -0,05$ a pressão da matéria escura se anula quando o *redshift* vai a zero, e tende para valores pequenos para *redshifts* maiores. Enfatizamos que, embora pequena, a pressão da matéria escura introduzida aqui exerce uma influência significativa no comportamento da evolução do sistema como um todo. Por completeza, apresentamos no lado direito desta figura a evolução da densidade do número de partículas da matéria escura como função do *redshift* e, como esperado, as densidades do número de partículas para os casos de pressão não-nula crescem mais rapidamente com o *redshift* se comparados com o caso sem pressão.

4.2 Acoplamento de Wetterich

4.2.1 Equações de campo

Nesta seção adotaremos os mesmos constituintes para o Universo utilizados na seção anterior: uma mistura de um campo escalar, um campo de matéria escura, bárions não-interagentes e radiação. Consideraremos novamente que o campo escalar (energia escura) é não-minimamente acoplado à curvatura escalar, e daqui em diante a matéria escura interage com o campo escalar de acordo com um modelo proposto por Wetterich [21, 22].

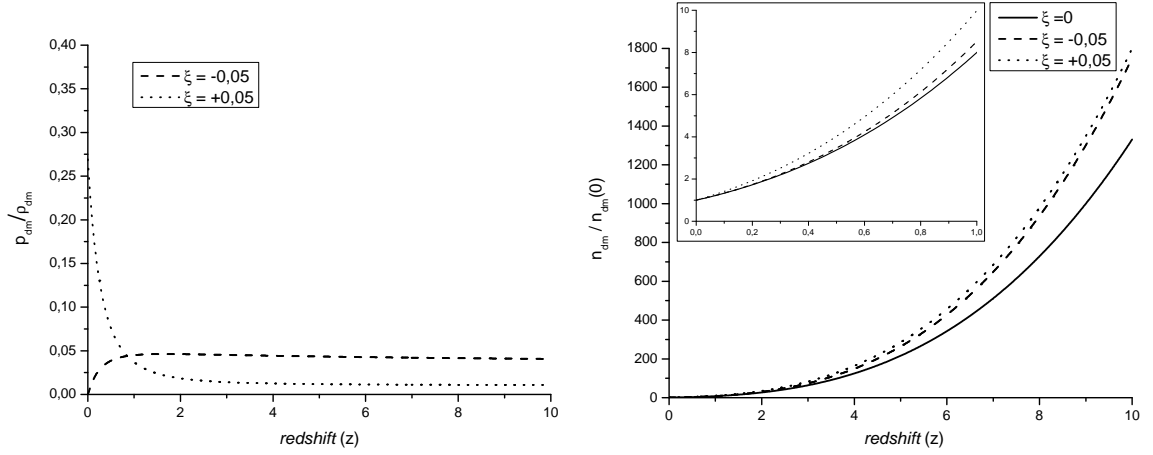


Figura 4.6: Esquerda: pressão da matéria escura p_{dm}/ρ_{dm} vs. *redshift* z ; direita: densidade do número de partículas da matéria escura $n_{dm}(z)/n_{dm}(0)$ vs. *redshift* z .

O Universo continua descrito pela métrica de Robertson-Walker, as equações de Friedmann e da aceleração são as mesmas que as dadas em (4.15) e (4.16) e assumimos que $\rho = \rho_b + \rho_r + \rho_{dm} + \rho_\phi$ e $p = p_b + p_r + p_{dm} + p_\phi$ representam a densidade e a pressão das fontes do campo gravitacional, respectivamente. A equação modificada de Klein-Gordon para o campo escalar, que leva em conta o acoplamento não-mínimo e o modelo de interação com a matéria escura utilizado a partir de agora fica

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + \frac{\xi\phi}{1-\xi\phi^2}(\rho - 3p) - \beta\rho_{dm} = 0, \quad (4.37)$$

onde β é a constante que acopla os campos de matéria e energia escura. A densidade de energia e a pressão da energia escura ainda são dadas por (4.22), e desta equação juntamente com (4.37) segue que a equação de evolução para a densidade de energia escura é

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -\frac{2\xi\phi\dot{\phi}\rho}{1-\xi\phi^2} + \beta\rho_{dm}\dot{\phi}. \quad (4.38)$$

O primeiro termo do lado direito de (4.38) é o responsável pela transferência de energia entre o campo de energia escura e o campo gravitacional, enquanto o segundo termo refere-se à transferência para o campo de matéria escura.

Assumiremos novamente que os bárions são partículas não-relativísticas, de tal forma que $p_b = 0$, e também que a equação barotrópica de estado para o campo de radiação $p_r = \rho_r/3$ continua válida. Isso implica na validade das relações $\rho_b \propto 1/a^3$ e $\rho_r \propto 1/a^4$, também utilizadas anteriormente.

A partir disso, juntamente com (4.15) e (4.38), segue a equação de evolução para a densidade de energia do campo de matéria escura:

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H(\rho_{dm} + p_{dm}) = -\beta\rho_{dm}\dot{\phi}. \quad (4.39)$$

Chamamos a atenção para o fato de que o termo no lado direito de (4.39) representa a transferência de energia do campo de energia escura para o campo de matéria escura.

4.2.2 Resultados do modelo

Como feito na seção 4.1, duas situações diferentes para a matéria escura podem ser analisadas: uma na qual ela é considerada como tendo pressão nula e outra na qual ela possui pressão diferente de zero.

Matéria escura sem pressão

Para o caso de matéria escura sem pressão ($p_{dm} = 0$), segue da equação (4.39) que

$$\rho_{dm} \propto \frac{e^{-\beta\phi}}{a^3}. \quad (4.40)$$

Podemos considerar que permanecem válidas as relações $\rho_b \propto 1/a^3$ e $\rho_r \propto 1/a^4$. Aqui temos a resolver apenas a equação de evolução do campo escalar (4.37) para obter a evolução temporal do campo de aceleração e das densidades de energia de cada constituinte. Fazendo uma mudança de variáveis, podemos expressar a equação do campo escalar da energia escura em termos do *redshift* z utilizando (4.27):

$$\frac{(1+z)^2\rho}{3(1-\xi\phi^2)}\phi'' - \frac{(1+z)(\rho-3p)}{6(1-\xi\phi^2)}\phi' + \frac{dV}{d\phi} + \frac{\xi\phi(\rho-3p)}{1-\xi\phi^2} - \beta\rho_{dm} = 0. \quad (4.41)$$

Para solucionar (4.41) precisamos escolher uma forma para a densidade de potencial; selecionamos aqui a mais usual, apresentada em (3.64):

$$V(\phi) = V_0 \exp[-\alpha\phi(t)], \quad (4.42)$$

com V_0 e α sendo constantes arbitrárias. As condições iniciais para as densidades de energia foram escolhidas da mesma maneira que na subseção 4.1.2: $\Omega_b(0) = 0,045$, $\Omega_r(0) = 4,73 \cdot 10^{-5} g_*(z)/2$ e $\Omega_{dm}(0) = 0,23$. A constante V_0 foi novamente determinada a partir do atual parâmetro de densidade da energia escura, $\Omega_\phi(0) = 0,72$. A influência dos parâmetros β e ξ pode ser observada nas figuras que seguem.

No lado esquerdo da figura 4.7, mostramos a evolução dos parâmetros de densidade contra o *redshift*, onde consideramos um valor fixo para o expoente α , neste caso $\alpha = 1/10$, e valores diferentes para as constantes de acoplamento β e ξ . Desta figura percebemos que todos os tipos de acoplamento atrasam o crescimento da densidade de energia da matéria escura e o decaimento da densidade de energia escura em relação ao *redshift*, em uma comparação com o caso não-acoplado, isto é, $\beta = \xi = 0$. Ainda, valores positivos de ξ implicam em que a igualdade radiação-matéria (matéria escura e bárions) ocorra em *redshifts* maiores, enquanto para valores negativos em *redshifts* mais baixos; entretanto, a igualdade radiação-matéria mais distante dos dias atuais é a do caso desacoplado.

O parâmetro de desaceleração q em função do *redshift* é mostrado no lado direito da figura 4.7. Como dissemos anteriormente, de acordo com os valores experimentais atuais [5] a transição de uma fase desacelerada para uma fase acelerada ocorre em $z_T = 0,46 \pm 0,13$, enquanto o valor de hoje para o parâmetro de desaceleração no modelo Λ CDM é $q_0 \approx -0,6$. Notamos desta figura que a transição varia de $z_T \approx 0,7$ no caso sem acoplamento ($\beta = \xi = 0$) para $z_T \approx 0,5$ com $\beta = -0,5$ e $\xi = -0,003$. Além disso, mantendo um valor fixo para β , os valores positivos de ξ causam transições mais tardias, enquanto os valores negativos implicam em transições antecipadas. Isso significa que, ao ajustarmos as constantes de acoplamento neste modelo, é possível que nos aproximemos da concordância com os dados experimentais.

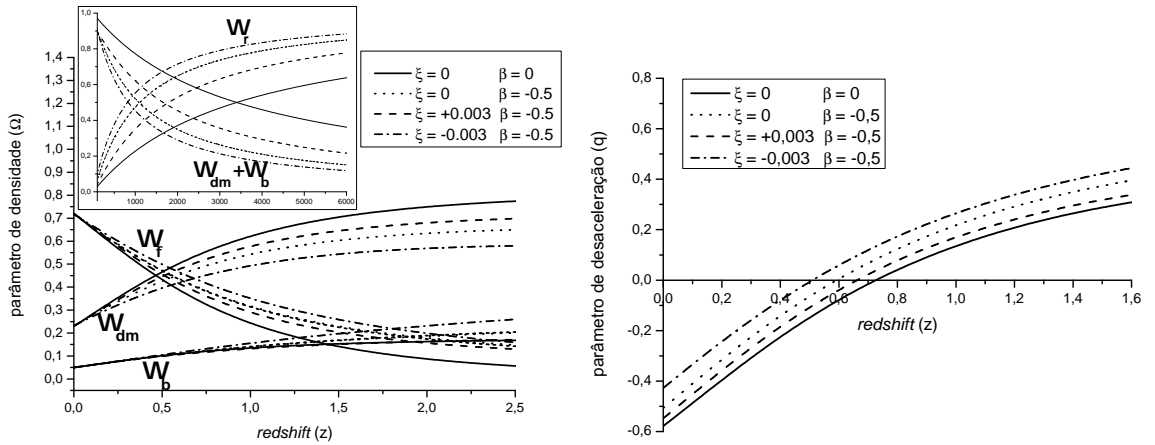


Figura 4.7: Esquerda: evolução dos parâmetros de densidade Ω_i vs. *redshift* z ; direita: parâmetro de desaceleração q vs. *redshift* z .

Na figura 4.8 exibimos a diferença μ_0 entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M de uma fonte em função do *redshift*, cuja expressão já foi apresentada em (4.30). Vemos desta figura que todos os casos encaixam-se bem nos pontos experimentais em *redshifts* baixos, e conforme ξ torna-se mais negativo a curva move-se para cima, concordando com uma maior quantidade de pontos, embora com diferenças praticamente inexpressivas para as constantes aqui utilizadas.

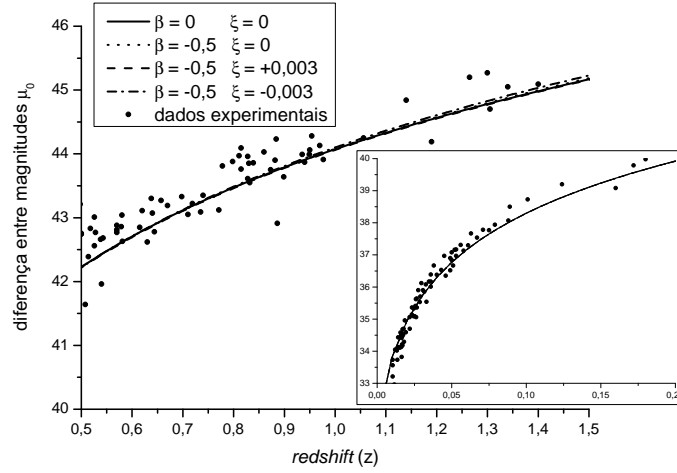


Figura 4.8: Diferença μ_0 vs. *redshift* z .

Matéria escura com pressão não nula

Vamos agora supor a existência de pressão da matéria escura e analisar sua influência no comportamento do modelo [47]. Objetivando determinar a expressão para essa pressão, recorreremos a (4.33) – que continua sendo válida, e fazendo uso de (4.39) obtemos:

$$\frac{p_{dm}}{\rho_{dm}} = -\frac{1}{2} - \frac{\beta\dot{\phi}}{6H} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta\dot{\phi}}{6H}\right)^2 + \frac{2\xi\phi\dot{\phi}\rho}{3H\rho_{dm}(1-\xi\phi^2)}}. \quad (4.43)$$

Notamos novamente que apenas o sinal positivo pode ser escolhido na equação acima para obtermos uma pressão de matéria escura positiva. Além disso, observamos que neste caso a pressão se anula quando $\beta = \xi = 0$. Nosso objetivo agora é resolver o sistema de equações diferenciais (4.37) e (4.39) como função do *redshift*, utilizando as mesmas suposições da seção anterior para as densidades dos bárions e da radiação, a mesma forma do potencial exponencial e as mesmas condições iniciais.

Após mudança de variáveis, as equações podem ser escritas como

$$\frac{(1+z)^2 \rho}{3(1-\xi\phi^2)} \phi'' - \frac{(1+z)(\rho-3p)}{6(1-\xi\phi^2)} \phi' + \frac{dV}{d\phi} + \frac{\xi\phi(\rho-3p)}{1-\xi\phi^2} - \beta\rho_{dm} = 0, \quad (4.44)$$

$$\rho'_{dm} - \frac{3(\rho_{dm} + p_{dm})}{(1+z)} = -\beta\rho_{dm}\phi'. \quad (4.45)$$

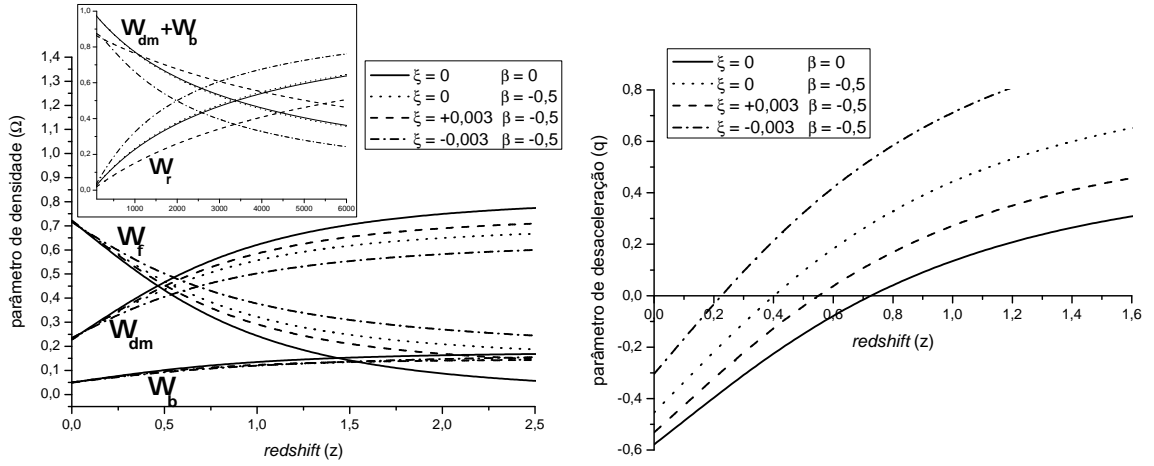


Figura 4.9: Esquerda: evolução dos parâmetros de densidade Ω_i vs. *redshift* z ; direita: parâmetro de desaceleração q vs. *redshift* z .

No lado esquerdo da figura 4.9, mostramos a evolução dos parâmetros de densidade contra o *redshift*, onde consideramos novamente o valor fixo $\alpha = 0,1$ para a constante do potencial $V(\phi)$. Desta figura percebemos que todas as soluções com constantes de acoplamento não-nulas novamente causam atraso no crescimento da densidade de energia da matéria escura e no decaimento da densidade de energia escura em relação ao *redshift* em comparação com o caso não-acoplado, e agora também em comparação com o caso sem pressão. Ainda, valores positivos de ξ implicam no fato de que a igualdade radiação-matéria (matéria escura e bárions) ocorre em *redshifts* maiores (agora maiores inclusive que os do caso desacoplado), enquanto para valores negativos em *redshifts* mais baixos. Em resumo, a existência de pressão da matéria escura atrasa a ocorrência da igualdade radiação-matéria.

O parâmetro de desaceleração, mostrado no lado direito da figura 4.9, mostra uma transição que varia de $z_T \approx 0,7$ no caso sem acoplamento para $z_T \approx 0,2$ com $\beta = -0,5$ e $\xi = -0,003$. Observamos efeitos qualitativos semelhantes aos do caso com

pressão de matéria escura nula, mas aqui eles se mostram muito mais pronunciados – o que pode ser prontamente entendido a partir da expressão (3.49), que relaciona o parâmetro de desaceleração q com a pressão total do Universo: pressões totais mais positivas implicam em transições antecipadas. Isso reflete em ainda mais liberdade para a variação dos parâmetros e o ajuste das curvas de acordo com os resultados das medidas experimentais.

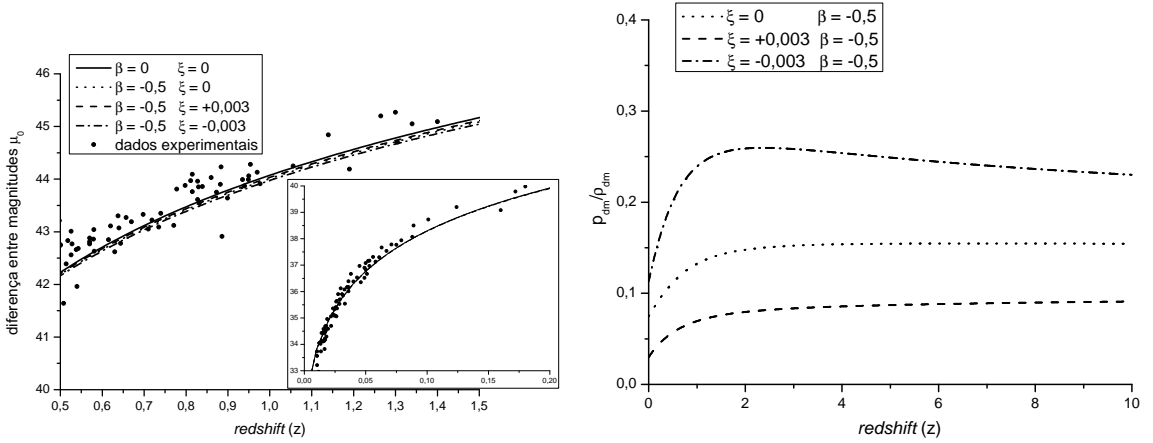


Figura 4.10: Esquerda: diferença μ_0 vs. *redshift* z ; direita: pressão da matéria escura p_{dm}/ρ_{dm} vs. *redshift* z .

No lado esquerdo da figura 4.10 mostramos diferença entre magnitudes μ_0 , e podemos observar que, conforme o *redshift* aumenta, as soluções com acoplamento tendem a mover-se para baixo relativamente àquelas com $\beta = \xi = 0$. Isso significa que de maneira geral a pressão de matéria escura contribui para diminuir a diferença entre as magnitudes, atuando ainda mais fortemente nos casos em que ξ é negativo.

A pressão da matéria escura em função do *redshift* é apresentada no lado direito da figura 4.10. A partir dela inferimos que, para um valor fixo da constante de acoplamento β , valores negativos de ξ implicam em pressões maiores, e conforme aumentamos ξ para a faixa de valores positivos a pressão decresce se comparada com o caso no qual $\xi = 0$.

4.3 Observações finais

Uma descrição equivalente para modelo do campo escalar não-minimamente acoplado estudado nas seções anteriores pode ser conseguida se escrevermos as equa-

ções de Einstein como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (4.46)$$

Neste caso, o tensor energia-momento das fontes é conservado, isto é, $\nabla_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$, onde o tensor energia-momento do campo escalar é

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\phi} = & \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - V \right) g_{\mu\nu} - \xi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2 - g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi^2) + \\ & + \xi \phi^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Considerando a métrica de Robertson-Walker e a representação para o tensor energia-momento $\mathcal{T}^\mu{}_\nu = \text{diag}(\tilde{\rho}, -\tilde{p}, -\tilde{p}, -\tilde{p})$, aparecem as equações de Hubble e da aceleração em suas formas usuais, que são

$$H^2 = \frac{\tilde{\rho}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\tilde{\rho} + 3\tilde{p}}{6}. \quad (4.48)$$

Entretanto, a densidade de energia e a pressão do campo escalar nesta descrição têm novas contribuições, que são dadas pelos termos sublinhados:

$$\tilde{\rho}_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + 6\xi H\phi\dot{\phi} + \underline{\xi\phi^2\tilde{\rho}}, \quad (4.49)$$

$$\tilde{p}_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V - 2\xi \left(\phi\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2 + 2H\phi\dot{\phi} \right) + \underline{\xi\phi^2\tilde{p}}, \quad (4.50)$$

de maneira que as somas $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_\phi + \rho_{dm} + \rho_b + \rho_r$ e $\tilde{p} = \tilde{p}_\phi + p_{dm} + p_b + p_r$ resultam

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_\phi + \rho_{dm} + \rho_b + \rho_r}{1 - \xi\phi^2} = \frac{\rho}{1 - \xi\phi^2}, \quad (4.51)$$

$$\tilde{p} = \frac{p_\phi + p_{dm} + p_b + p_r}{1 - \xi\phi^2} = \frac{p}{1 - \xi\phi^2}, \quad (4.52)$$

mostrando a equivalência entre esta descrição e a primeira.

Capítulo 5

Conclusões

Na primeira etapa do trabalho estudamos a álgebra tensorial e os princípios da equivalência e da covariância geral, que formam a base da teoria da relatividade geral. Em seguida deduzimos as equações que regem a evolução do Universo e estudamos os dois modelos considerados principais atualmente (Λ CDM e campo escalar minimamente acoplado), fazendo sempre comparações com os dados experimentais. Em relação aos modelos que propusemos, apresentamos a seguir nossas principais conclusões.

Acoplamento de Anderson e Carroll

Observamos inicialmente que este modelo apresenta uma dependência relativamente importante das condições iniciais. Para o caso da matéria escura sem pressão, mostramos que: (a) um acoplamento mais forte entre o campo escalar e o escalar de curvatura leva a transição de uma fase desacelerada para acelerada e a igualdade matéria-radiação a ocorrerem em *redshifts* menores; (b) uma variação mais intensa do campo escalar implica no fato de que acoplamentos mais fortes ajustam-se melhor com os dados experimentais da distância de luminosidade, mas a igualdade matéria-radiação ocorre em *redshifts* maiores. Para o caso de uma pressão da matéria escura que não se anula, mostramos que pequenos valores da constante de acoplamento levam a: (a) uma transição de fase desacelerada-acelerada em *redshifts* mais baixos com ajuste melhor ao valor presente do parâmetro de desaceleração, mas a igualdade radiação-matéria ocorre em *redshifts* maiores; (b) um melhor ajuste com os dados experimentais da distância de luminosidade.

Acoplamento de Wetterich

O comportamento das curvas apresentadas nas figuras 4.7-4.10 não pode ser interpretado como uma consequência direta das equações (4.38), (4.39) e (4.43) somente. Resolvemos o sistema de equações diferenciais acopladas impondo que a derivada do campo escalar aproxime-se de valores pequenos e positivos para *redshifts* muito altos, uma condição necessária para que tenhamos resultados fisicamente aceitáveis (ou seja, densidade de energia escura positiva). Além disso, os valores de hoje ($z = 0$) para $\dot{\phi}$ podem variar de uma solução para outra.

Entretanto, quando selecionamos uma constante de acoplamento β negativa e um valor nulo de ξ , o lado direito de (4.38) fica positivo e o decréscimo de ρ_ϕ em função do *redshift* é amortecido. Como imposto por (4.39), a mesma razão faz com que ρ_{dm} cresça a uma taxa menor, e caracterize uma transferência de energia do campo de matéria escura para o campo de energia escura conforme o *redshift* aumenta. Analisando novamente (4.38), podemos notar que a constante de acoplamento ξ é a responsável pela transferência de energia entre o campo de energia escura e o campo gravitacional.

Nosso modelo apresentado na seção 4.2 engloba dois tipos comuns de acoplamento, que podem ser ajustados independentemente e cujos efeitos combinados não são obtidos por apenas um deles sozinho. Podemos finalizar observando que o modelo é capaz de ajustar-se a avanços experimentais futuros, que irão desqualificar diversas alternativas hoje consideradas possíveis.

Observações finais

Ainda que os dois tipos de acoplamento entre matéria escura e energia escura investigados neste trabalho tenham produzido equações similares, eles levam a algumas diferenças importantes no comportamento dos parâmetros de evolução. Por exemplo, foi apenas no caso do acoplamento de Anderson e Carroll com pressão de matéria escura nula que obtivemos diferenças entre magnitudes que podem ser consideradas significativas se comparadas com o modelo Λ CDM para um dado *redshift*. Adicionalmente, foi apenas neste caso (porém para pressão de matéria escura não-nula) que o parâmetro de densidade da matéria escura alcançou o da energia escura em um *redshift* menor que para o modelo usual do campo escalar. Entretanto, o acoplamento de Wetterich possui uma vantagem adicional: torna possível que se ajustem a intensidade dos dois tipos de acoplamentos usados, ao contrário da interação fixa

entre o setor escuro utilizada na seção 4.1.

Trabalhos futuros

Ainda é possível submeter os modelos aqui apresentados a outros testes que corroborariam ou não sua validade. Por exemplo, seria bastante importante analisar como eles se comportariam sob uma análise de perturbações e qual seria o espectro que representa a amplitude das flutuações em função da escala angular (ver figura 3.5), uma análise importantíssima para que se verifique se estes modelos são capazes de prever as atuais anisotropias da radiação cósmica de fundo. Outra análise possível seria a da estabilidade dinâmica do conjunto de equações diferenciais utilizadas, o que permitiria que obtivéssemos um mapa completo das regiões estáveis e instáveis, e permitir-nos-ia conhecer o comportamento completo do modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Persic, P. Salucci, F. Stel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281**, 27 (1996).
- [2] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [3] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [4] S. M. Carroll, *Liv. Rev. Rel.* **4**, 1 (2001).
- [5] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [6] J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D* **69**, 083521 (2004).
- [7] S. M. Carroll, M. Hoffman, M. Trodden, *Phys. Rev. D* **68**, 023509 (2003).
- [8] S. D. H. Hsu, A. Jenkins, M. B. Wise, *Phys. Lett. B* **597** 270 (2004).
- [9] M. S. Madsen, *Class. Quant. Grav.* **5**, 627 (1988).
- [10] J. P. Uzan, *Phys. Rev. D* **59**, 123510 (1999).
- [11] T. Chiba, *Phys. Rev. D* **60**, 083508 (1999).
- [12] L. Amendola, *Phys. Rev. D* **60**, 043501 (1999).
- [13] G. Esposito-Farèse, D. Polarski, *Phys. Rev. D* **63**, 063504 (2001).
- [14] V. Faraoni, *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 2259 (2001).
- [15] J. B. Binder, G. M. Kremer, *Model for a Universe described by a non-minimally coupled scalar field and interacting dark matter*, a ser publicado na *Gen. Rel. Grav.*
- [16] L. R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig, *Phys. Lett. B* **549**, 13 (2002).
- [17] J. A. Casas, J. Garcia-Bellido, M. Quiros, *Class. Quant. Grav.* **9**, 1371 (1992).

- [39] G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J. Supp.* **148**, 135 (2003).
- [40] S. Burles *et al.*, *Astrophys. J.* **552**, L1 (2001).
- [41] S. W. Allen *et al.*, *preprint* astro-ph/0405340 (2004).
- [42] K. H. Chae *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 151301 (2002).
- [43] M. Fukugita, P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **616**, 643 (2004).
- [44] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2.^a ed., 1996.
- [45] A. R. Liddle, D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [46] G. R. Farrar, P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **604**, 1 (2004).
- [47] J. B. Binder, G. M. Kremer, *Braz. J. Phys.* **35-4B**, 1038 (2005).